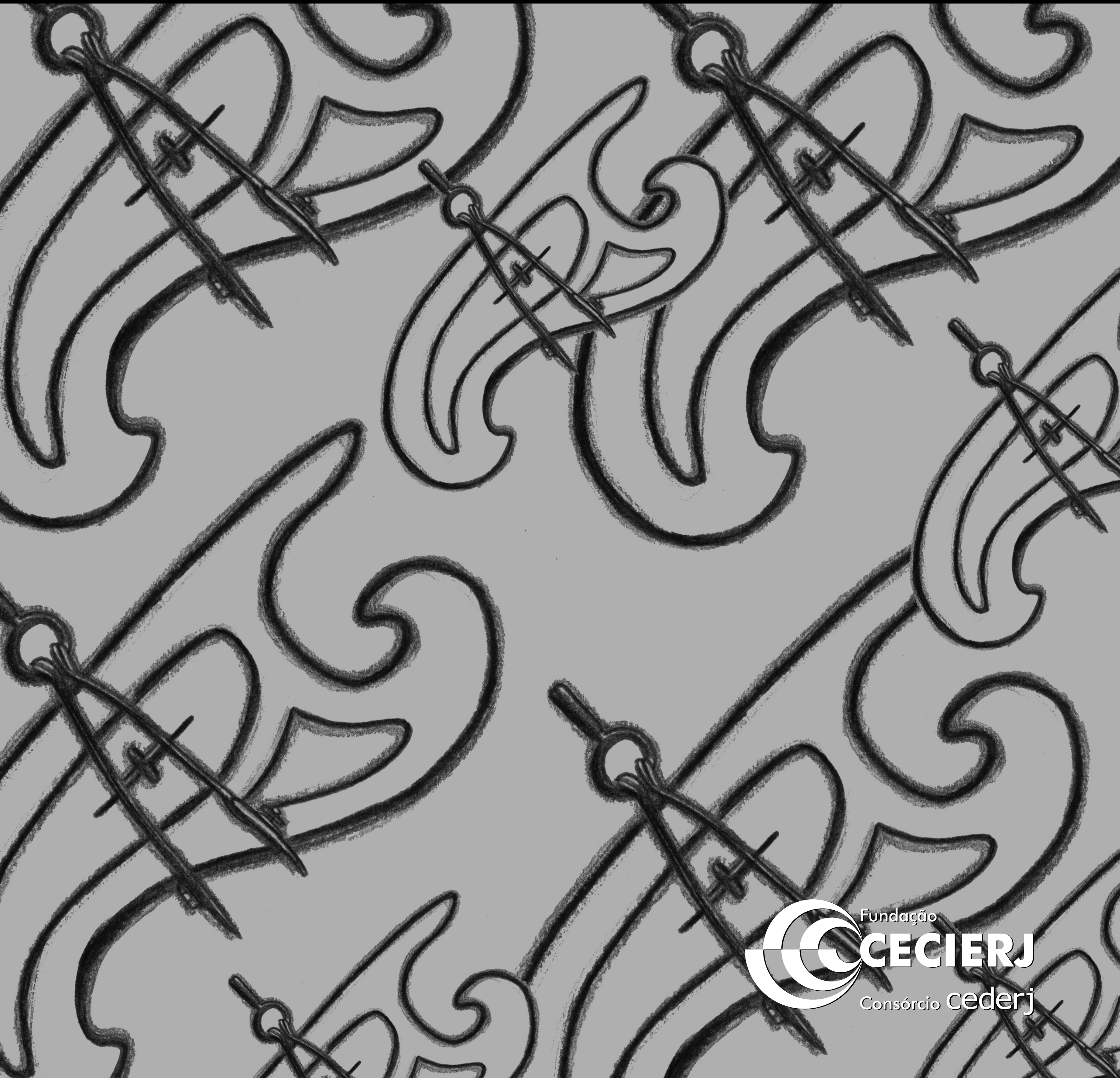
Módulo 1

Volume 1
2ª edição

Dirce Uesu Pesco
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Geometria Básica



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Geometria Básica

Volume 1 - Módulo 1
2ª edição

Dirce Uesu Pesco
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

FUNDAÇÃO SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Dirce Uesu Pesco
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Alexandre Rodrigues Alves
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO
Débora Barreiros

Departamento de Produção

EDITOR
Fábio Rapello Alencar

COORDENAÇÃO DE REVISÃO
Cristina Freixinho

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Ronaldo d'Aguiar Silva

DIRETOR DE ARTE
Alexandre d'Oliveira

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Equipe CEDERJ

CAPA
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra
Verônica Paranhos

P383g

Pesco, Dirce Uesu.
Geometria básica. v.1 / Roberto Geraldo Tavares Arnaut. -- 2.ed. -- Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
280p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-659-6

1.Geometria. 2. Triângulos. 3. Ângulos. 4. Figuras geométricas. I. Uesu Pesco, Dirceu. II. Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. III. Título.

CDD: 516

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2010.2/2011.1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Geometria Básica

Volume 1 - Módulo 1

SUMÁRIO

Prefácio

Os primeiros resultados geométricos são bem antigos e são de origem experimental. Foram observados pelo homem em sua atividade prática. Como ciência empírica a Geometria alcançou em seu período inicial um nível singularmente elevado no Egito. Durante o primeiro milênio anterior a nossa era as noções de geometria passaram dos egípcios aos gregos, e na Grécia antiga iniciou-se uma nova etapa de descobrimento desta ciência. No período compreendido entre os séculos VII e III antes da nossa era, os geômetras gregos enriqueceram a geometria com numerosos resultados novos.

Euclides (300 A.C.) reuniu e sistematizou a geometria Grega em sua famosa obra "Elementos", que foi a primeira exposição fundamentada da Geometria. O livro é composto por 13 livros dos quais 8 foram dedicados a Geometria e os outros a Aritmética. O primeiro livro é de definições, postulados e axiomas. Por exemplo:
Postulado I : é possível traçar uma reta de um ponto a outro.
Axioma I : Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
Axioma II: Se a duas coisas iguais se somam coisas iguais, se obtém somas iguais.

Tanto os postulados quanto os axiomas constituem afirmações admitidas sem demonstração. Hoje em dia chamamos todas essas afirmações de axiomas. Dos axiomas seguem os teoremas e os problemas.

Esta construção de geometria sugeriu aos geômetras o desejo natural de reduzir ao mínimo o número de postulados e axiomas. O próprio Euclides e muitos geômetras tentaram reduzir. Muitos deles começaram pelo 5° postulado. Mas em todas estas demonstrações os geômetras utilizavam alguma afirmação equivalente ao 5° postulado e não dos outros postulados e axiomas. Algumas dessas afirmações são:
1) Todas as perpendiculares a um lado do ângulo agudo cortam seu outro lado.
2) Existem triângulos de áreas tão grandes quanto se queira.
3) As retas paralelas são equidistantes.

As tentativas erradas de demonstração colocaram dúvidas, no fim do século XVIII, da possibilidade de se provar o 5° postulado.

A solução desta questão está nas obras do grande geômetra russo Nicolai Lobachevsky (1792-1856).

Uma das equivalências do 5° postulado é que dado uma reta r *e um ponto* $P \notin r$*, pode-se passar uma e somente uma reta* s *passando por* P *e paralela a* r.

Lobachevsky substituiu o 5° postulado pelo seguinte:
Por um ponto exterior a uma reta pertencente a um plano passam duas retas que não a cortam.

Assim como os geômetras anteriores, Lobachevsky tinha esperança de descobrir uma contradição na afirmação que se despreende do novo postulado. Não chegou a contradição alguma e concluiu que existe, uma Geometria distinta da Euclidiana onde não tem lugar o 5° Postulado de Euclides. Esta Geometria hoje, chama-se Geometria de Lobachevsky ou hiperbólica.

Os geômetras que se seguiram a Lobachevsky demonstraram que não tem contradição a Geometria de Euclides tão pouco tem a Geometria de Lobachevsky.

São válidos resultados nas duas teorias como igualdade de triângulo, relação entre lados e ângulo dos triângulos, etc.
Os teoremas que usam o axioma das paralelas de Lobachevsky tem enunciados bem diferentes.

Na Geometria Euclidiana temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. *Na Geometria de Lobachevsky temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que* $180°$.

Na Geometria Euclidiana existe um número infinito de triângulos semelhantes iguais a ele. Na Geometria de Lobachevsky tem que se em dois triângulos os ângulos são iguais, então os triângulos são iguais.

A continuada falta de reconhecimento com as suas descobertas e com publicação de suas obras, "Novos fundamentos de geometria"em 1835-1838, "Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas"em 1840 e "Pangeometria"em 1855 tanto o abalaram que Lobachevsky nada mais publicou. A parte do leão do crédito pelo desenvolvimento da Geometria não-Euclidiana pertence pois a Lobachevsky.

As informações históricas foram obtidas em "História da Matemática, de Carl B. Boyer-publicada pela editora Edgard Blucher em 1974, traduzida por Elza F. Gomide e também na Revista do Professor de Matemática publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Estrutura do livro

A primeira parte da disciplina Geometria Básica engloba os seguintes conteúdos em ordem cronológica de apresentação: Conceitos Básicos, Congruência de Triângulos, Polígonos Convexos, ângulos em uma Circunferência; Quadriláteros Notáveis, Pontos Notáveis de um Triângulo, Segmentos Proporcionais, Triângulos Semelhantes, Triângulo Retângulo e Triângulo Qualquer, Polígonos Regulares e Comprimento de uma Circunferência, e áreas de Superfícies Planas.

O livro apresenta contéudos em forma de aulas de 01 a 12. E finalmente, um conjunto de Exercícios Programados e suas soluções aplicados no segundo semestre do ano de 2008, para este conteúdo.

A organização da disciplina é de duas aulas a ser abordada semanalmente, exceto a aula 01 que corresponde a primeira semana de aula.

Apresentação e Objetivos

Este livro é resultado da experiência do Professor Roberto Geraldo nas disciplinas lecionadas no Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense e também de sua experiência de mais de 20 anos com o ensino médio.

O livro foi produzido no segundo semestre de 2008 quando da coordenação da disciplina Geometria Básica, juntamente com a Professora Dirce Uesu Pesco, sendo direcionado a alunos do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFF/CEDERJ/UAB.

O objetivo da disciplina é desenvolver a visão geométrica e espacial, a introdução ao tratamento axiomático, a argumentação lógica bem como o uso do raciocínio geométrico na resolução dos problemas. E esta é parte essencial para a formação do conhecimento matemático necessário ao licenciado de Matemática.

Método de estudo

Para sua orientação e organização na disciplina procure consultar frequentemente o Cronograma e o Guia da disciplina de Geometria Básica, disponível na Plataforma para sua impressão e consulta. Segue algumas sugestões para um programa de estudo pessoal:

- *Estude regularmente. Faça, para cada semana, um resumo contendo os resultados apresentados nas respectivas aulas. Destaque as palavras-chave.*

- *Consulte a tutoria para tirar dúvidas. Anote todas as suas dúvidas e dificuldades que encontrou no conteúdo da semana para esclarecê-las na tutoria.*

- *Organize seu tempo. Faça uma agenda semanal adequada para você, considerando o tempo para ler as aulas de cada disciplina, resolver exercícios resolvidos e propostos, bem como tempo para outras atividades extra-curriculares, como trabalho e diversão.*

- *Consulte a bibliografia recomendada. é muito importante consultar diferentes abordagens do mesmo conteúdo para uma visão avançada, adquirindo assim um conhecimento amplo e global.*

- *Faça parte de um grupo de estudo. Que oferece muitas vantagens como compromisso, motivação e troca de conhecimento.*

Roberto Geraldo Tavares Arnaut,

Dirce Uesu Pesco.

Aula 1 – Conceitos Básicos

A Geometria Elementar, também chamada *Geometria Euclidiana*, fundamenta-se em três entes geométricos aceitos sem definição: ponto, reta e plano.

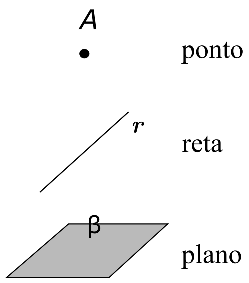
Representação

pontos: $A, B, C, \ldots$

retas: $a, b, c, \ldots$

planos: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

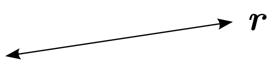
Notação:



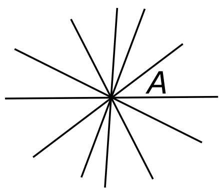
Indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta que passa pelo pontos A e B.

Postulado ou axioma é uma proposição aceita como verdadeira, sem demonstração.
Vamos dar exemplos de axiomas ou postulados.

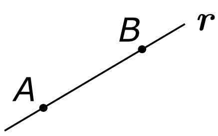
1. A reta é ilimitada nos dois sentidos.



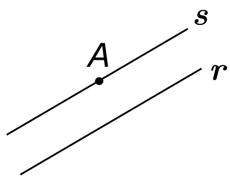
2. Por um ponto passam infinitas retas.



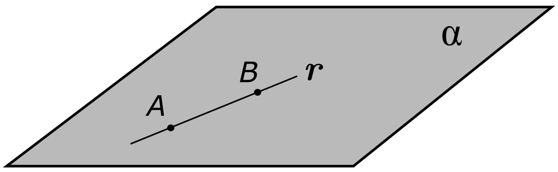
3. Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta.



4. Por um ponto, não pertencente a uma reta r, é possível traçar uma e somente uma reta paralela s. Este postulado é chamado de Postulado de Euclides.



5. Toda reta que passa por dois pontos distintos de um plano está contida nesse plano.



6. Um ponto O, de uma reta, divide-a em duas regiões denominadas semi-retas. O é denominado origem das duas semi-retas.

Notação: $\overrightarrow{OA}$

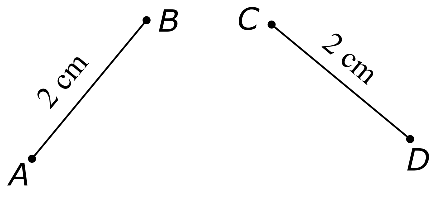
Definição: Dados dois pontos A e B de uma reta r, denomina-se segmento de reta AB a todos os pontos de r entre A e B. A e B são chamados de extremos.

Notação: $\overline{AB}$

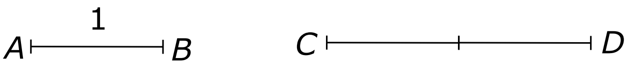
medida de um segmento $AB = m(\text{AB})$

Definição: Segmentos congruentes tem medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que tem medidas iguais são congruentes.

$$AB \equiv CD \quad se \quad m(AB) = m(CD)$$

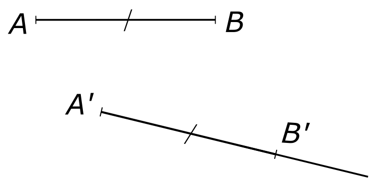


Medida de um Segmento: Para medir segmentos, tomamos um segmento como unidade e a partir daí, podemos medir qualquer outro segmento.

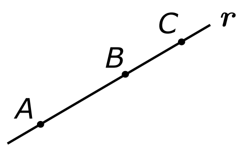


$\overline{CD} = 2\ m(\text{AB})$

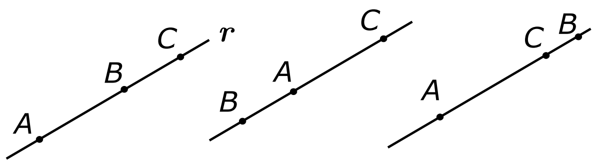
7. Postulado do Transporte de Segmentos: Dados um segmento AB e uma semi-reta de origem A', existe sobre essa semi-reta um único B' tal que $A'B' \equiv AB$.



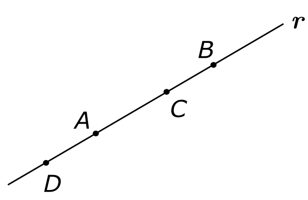
Definição: Pontos colineares são pontos que pertencem à uma mesma reta.



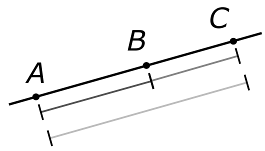
8. Dados três pontos colineares e distintos dois a dois, um deles, e apenas um, está entre os outros dois.



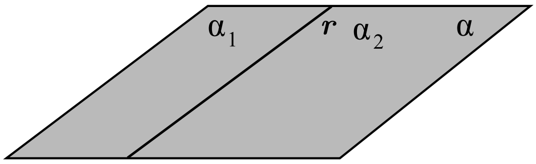
9. Dados dois pontos distintos A e B de uma reta r, existe sempre um ponto C que está entre A e B, e um ponto D tal que A está entre D e B.



10. Se B está entre A e C, então $m(\mathrm{AC}) = \mathrm{m(AB)} + \mathrm{m(BC)}$



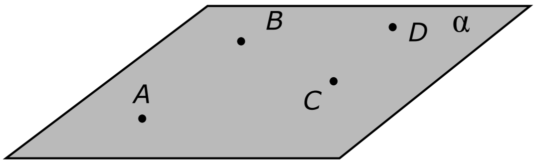
11. Uma reta pertencente a um plano, divide-o em duas regiões chamadas semiplanos sendo r a reta origem dos dois semiplanos.



*T*eorema é uma proposição aceita como verdadeira mediante demonstração.

*C*orolário é um resultado imediato de um teorema.

Pontos *c*oplanares são pontos que pertencem a um mesmo plano.



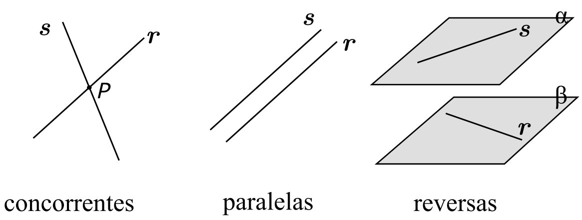
12. Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Posições relativas entre duas retas distintas: Duas retas r e s são:

1) concorrentes se sua interseção é um ponto.

2) paralelas se são coplanares e não tem ponto em comum.

3) reversas se não são coplanares.



Exercícios Resolvidos

1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

a) Por um ponto passam infinitas retas.( )

b) Por três pontos dados passa uma só reta.( )

c) Três pontos distintos são colineares.( )

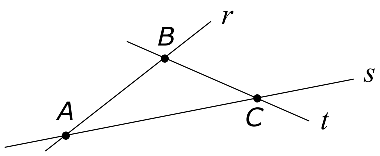
d) Duas retas coplanares e distintas são concorrentes ou paralelas.( )

e) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas.( )

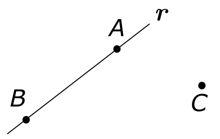
Solução:

a) (V), axioma.

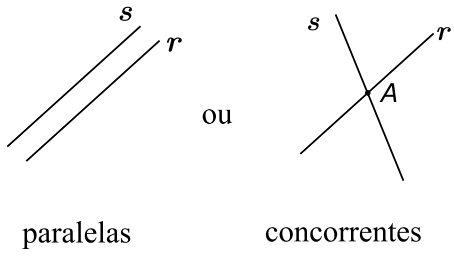
b) (F), por três pontos passam três retas.



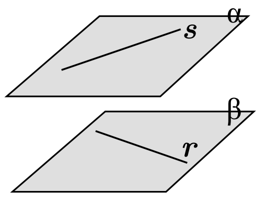
c) (F), três pontos distintos não são colineares.



d) (V),



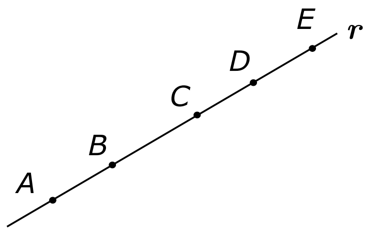
e) (F), pois elas podem ser reversas e nessa caso não são paralelas.



reversas

2. Quantas semi-retas há em uma reta com origem nos cinco pontos A, B, C, D e E?

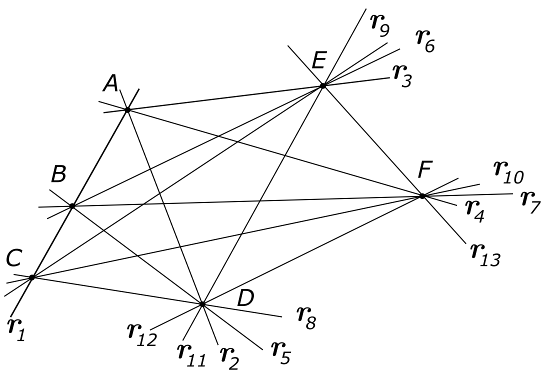
Solução:
Seja r a reta, e A, B, C, D, E pontos pertencentes a esta reta r.



Pelo axioma 6, cada ponto determina duas semi-retas, então 5 pontos determinam 10 semi-retas.

3. Por seis pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

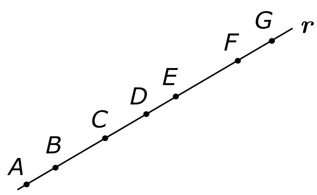
Solução:
Considere seis pontos A, B, C, D, E, F distintos, sendo três deles (A, B e C) colineares, vamos construir todas as retas possíveis, usando o axioma 3.



São 13 retas.

Exercícios Propostos

1. Quantos segmentos há em uma reta, com origem nos sete pontos distintos, dada na figura a seguir?



2. A, B e C são três pontos distintos numa reta. Se $\overline{AB}$ é igual ao dobro de $\overline{BC}$ e $\overline{AC} = 18$ cm, determine $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

3. O segmento $\overline{AB}$ de uma reta é igual ao quíntuplo do segmento $\overline{CD}$ dessa mesma reta. Determine a medida do segmento $\overline{AB}$, considerando-se como unidade de medida a sexta parte do segmento $\overline{CD}$.

4. Quatro retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. Qual o maior valor que n pode assumir?

Gabarito

1. 14.

2. $\overline{AB} = 12$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm ou $\overline{AB} = 36$ cm e $\overline{BC} = 18$ cm.

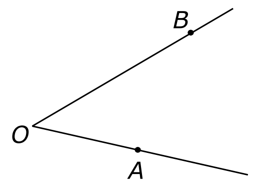
3. 30.

4. 6.

Ângulos

Definição: Ângulo geométrico é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Notação: $A\widehat{O}$B, onde O é o vértice.

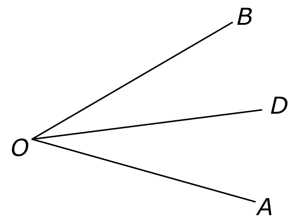


As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

Axioma 13: Um ângulo pode ser medido por meio de um instrumento chamado transferidor, que tem o grau como unidade. O número de graus de um ângulo é a sua medida. A medida de um ângulo geométrico é um número real α, tal que $0 < \alpha < 180^{\underline{o}}$.

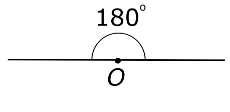
Notação: $A\widehat{O}$B: ângulo geométrico
m(A$\widehat{O}$B): medida do ângulo $A\widehat{O}$B

Se $\overrightarrow{OD}$ é uma semi-reta que divide $A\widehat{O}$B, então m(A$\widehat{O}$D) + m(D$\widehat{O}$B) = m(A$\widehat{O}$B).

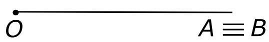


Nota:

1) O ângulo de $180^{\underline{o}}$ é chamado *r*aso e é quando os lados são semi-retas opostas.

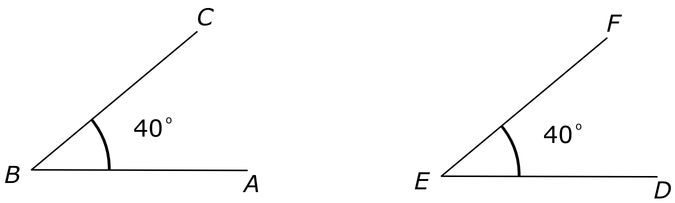


2) O ângulo de $0^{\underline{o}}$ é quando os lados coincidem.



3) Toda vez que houver referência a ângulo, entenda-se ângulo geométrico.

4) Dois ângulos são chamados *c*ongruentes se têm a mesma medida, na mesma unidade.
Exemplo:



Os ângulos $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$ na figura são congruentes.
Notação: $A\widehat{B}C \equiv D\widehat{E}F$.

Setor angular, interior de um ângulo, exterior de um ângulo

Definição: Seja um ângulo $A\widehat{O}B$ num plano α e consideremos os semiplanos α_1 de origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ que contém o lado $\overrightarrow{OB}$ e α_2, de origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém $\overrightarrow{OA}$ conforme a Figura 1. O conjunto dos pontos comuns aos semiplanos α_1 e α_2 denominamos de *s*etor angular. A Figura 2 mostra um setor angular.

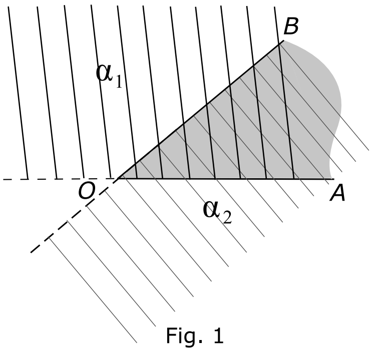


Fig. 1

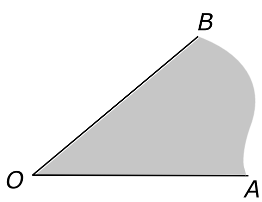
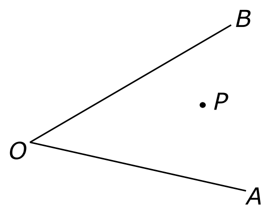
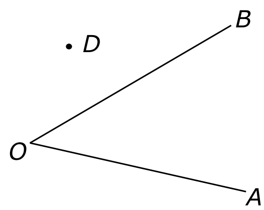


Fig. 2

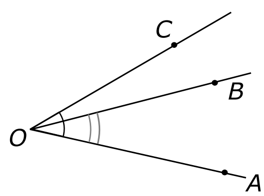
Definição: Um ponto que pertence ao setor angular e não pertence ao ângulo diz-se *p*onto interior ao ângulo A$\widehat{O}$B.



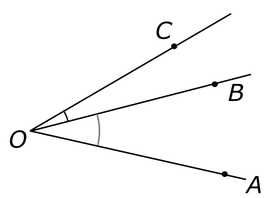
Definição: Um ponto do plano do ângulo que não pertence ao setor angular diz-se *p*onto exterior ao ângulo. O ponto D, na figura, é exterior ao ângulo $A\widehat{O}$B.



Definição: Ângulos que possuem o mesmo vértice e um lado comum são denominados ˆangulos consecutivos. Os ângulos $A\widehat{O}$B e $A\widehat{O}$C são consecutivos.

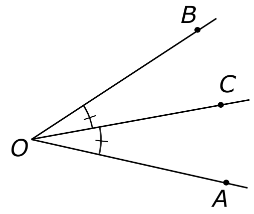


Definição: Dois ângulos consecutivos que não possuem ponto interior comum são denominados ângulos adjacentes.

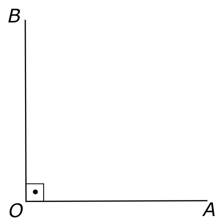


Os ângulos $A\widehat{O}$B e $B\widehat{O}$C são adjacentes.

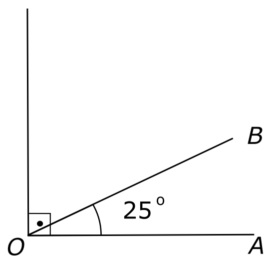
Definição: *B*issetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo, que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes. Na figura, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}$B.



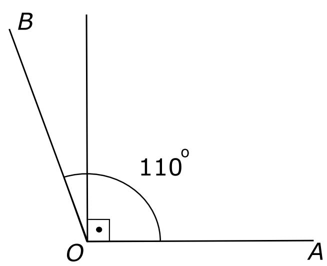
Definição: $\hat{A}$ngulo reto é um ângulo cuja medida é 90º. Na figura $A\widehat{O}$B é reto, o símbolo ⊡ representa um ângulo reto.



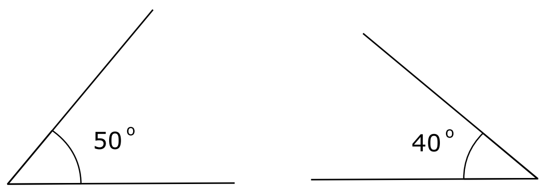
Definição: $\hat{A}$ngulo agudo é um ângulo cuja medida é menor que 90º. Na figura, $A\widehat{O}$B é ângulo agudo.



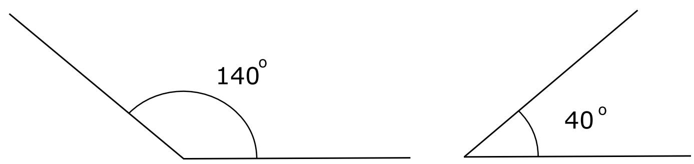
Definição: $\hat{A}$ngulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior que 90º. Na figura, $A\widehat{O}$B é ângulo obtuso.



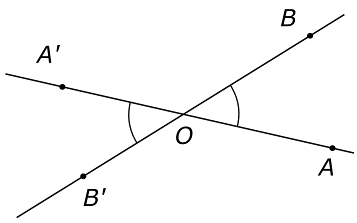
Definição: Dois ângulos são *c*omplementares se a soma de suas medidas é igual a $90^{\underline{o}}$.
Exemplo:



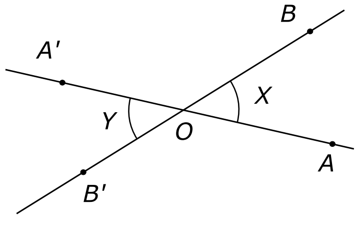
Definição: Dois ângulos são *s*uplementares se a soma de suas medidas é igual a $180^{\underline{o}}$.
Exemplo:



Definição: Dois ângulos são denominados *o*postos pelo vértice, se os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro. Na figura, os ângulos $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ e $\mathrm{A}'\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}'$ são opostos pelo vértice.



Teorema: Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
Prova:
Seja $A\widehat{O}$B e A'$\widehat{O}$B' dois ângulos opostos pelo vértice.

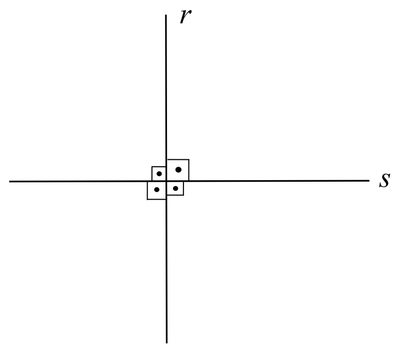


Denominamos $m(\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{B}) = \mathrm{X}$ e $m(\mathrm{A'}\widehat{O}\mathrm{B'}) = \mathrm{Y}$.
Temos que:
$m(\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{A'}) = 180^{\underline{o}} \Rightarrow m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{A'}) = 180 - \mathrm{X}$ (1)
$m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{B'}) = 180^{\underline{o}} \Rightarrow m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{A'}) = 180 - \mathrm{Y}$ (2)
De (1) e (2) vem:

$$180 - X = 180 - Y \Rightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Y}$$

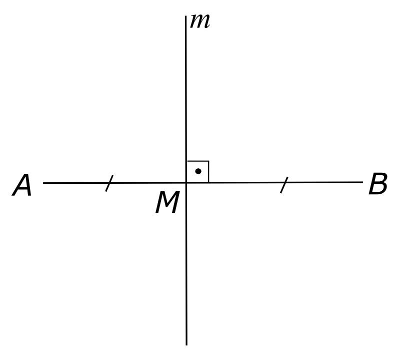
Logo, $A\widehat{O}\mathrm{B} = \mathrm{A'}\widehat{O}\mathrm{B'}$.

Definição: Duas retas são perpendiculares se são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes. Na figura a seguir, r e s são perpendiculares.

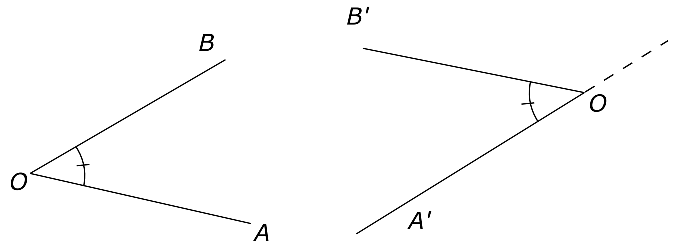


Decorre da definição que duas retas perpendiculares formam 4 ângulos retos.

Definição: Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a este segmento que passa pelo ponto médio desse segmento. A figura mostra a reta m, mediatriz do segmento AB.



Axioma 14: *P*ostulado de transporte de ângulos. Dado um ângulo $A\widehat{O}$B e uma semi-reta $\overline{O'A'}$ de um plano, existe sobre esse plano e num dos semi-planos que $\overrightarrow{OA'}$ permite determinar, uma única semi-reta $\overrightarrow{OB'}$ que forma com $\overrightarrow{OA'}$ um ângulo A'$\widehat{O}$B' congruente ao ângulo $A\widehat{O}$B.



Sistema de unidades angulares

a. *S*istema sexagesimal
Unidade: grau, notação: $m^{\underline{o}} \to m$ graus.
Definição: Um grau é $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.
Submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.
$1 = 60'$ e $1' = 60''$.

b. *S*istema decimal
Unidade: grado, notação: $m\ gr \to m$ grados.
Definição: Um grado é $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto.

- *R*elação entre esses dois sistemas
  Temos que:
  $1° = \frac{1}{90}$ do ângulo reto
  $1gr = \frac{1}{100}$ do ângulo reto
  $\Rightarrow 90° \longleftrightarrow 100gr$

Exercícios Resolvidos

1. Estabeleça a correspondência dos itens a seguir com as figuras de 1 a 5.

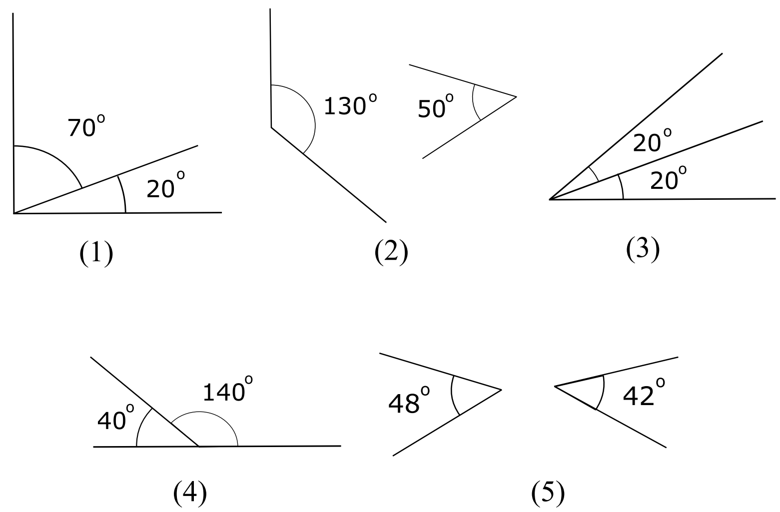
a) bissetriz de um ângulo;

b) ângulos complementares;

c) ângulos suplementares;

d) ângulos adjacentes e complementares;

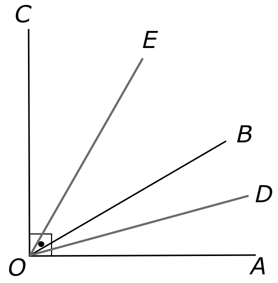
e) ângulos adjacentes e suplementares.



Resposta: a) 3; b) 5, c) 2; d) 1; e) 4.

2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares.

Solução: Considere dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ adjacentes e complementares.



Tracemos as bissetrizes OD e OE desses ângulos, respectivamente. Denote $m(\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{B}) = \mathrm{X}$ e $m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{C}) = \mathrm{Y}$, vem que:

$$X + \mathrm{Y} = 90^\circ$$

Temos que:
$m(\mathrm{D}\widehat{O}\mathrm{B}) = \dfrac{X}{2}$ e $m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{E}) = \dfrac{Y}{2}$

$\Rightarrow m(\mathrm{D}\widehat{O}\mathrm{E}) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{Y}{2} = \dfrac{\mathrm{X+Y}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Logo, o ângulo entre as bissetrizes é 45°.

3. Calcule o complemento dos ângulos:

a) 27° b) $32^\circ 38'$

Solução:

a) $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$

b) $90^\circ - 32^\circ 38' = 89^\circ 60' - 32^\circ 38' = 57^\circ 22'$

4. Calcule o suplemento do complemento de 72°.

Solução: O complemento de 72° é $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.
Daí, o suplemento do complemento de 72° é $180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

5. Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual a $\dfrac{3}{5}$ do seu suplemento.

Solução: Seja X a medida do ângulo procurado.
$180^\circ - X$ é a medida do suplemento do ângulo procurado, temos:

$$X = \frac{3}{5}(180 - X)$$

Resolvendo a equação vem:

$$5X = 540 - 3X \Rightarrow 8X = 540 \Rightarrow X = 67^\circ 30'$$

6. Dois ângulos opostos pelo vértice tem medidas expressas em graus por $4X - 20°$ e $2X + 15°$. Calcule as medidas desses ângulos.

Solução: Como os ângulos são opostos pelo vértice, então eles têm a mesma medida, ou seja:

$$4X - 20° = 2X + 15° \Rightarrow 2X = 35° \Rightarrow X = \frac{35°}{2} = 17°30'.$$

Assim, a medida de um deles é:

$$4X - 20° = 4 \cdot 17°30' - 20° = 50°$$

Logo, os ângulos medem 50°.

Exercícios Propostos

1. Calcule o suplemento dos ângulos:
   a) 47° b) $34°20'$

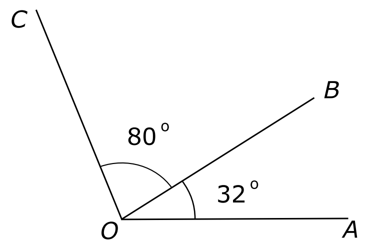
2. Dado um ângulo agudo de medida α, represente:
   a) A quinta parte do seu complemento.
   b) A décima parte do seu suplemento.

3. Qual é a medida de um ângulo que excede o seu complemento de 69°?

4. As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são $34\theta - 8°$ e $14\theta + 2°$. Calcule θ.

5. Prove que dois ângulos que têm o mesmo suplemento são congruentes.

6. Na figura $m(\text{A}\widehat{O}\text{B}) = 32°$ e $B\widehat{O}\text{C} = \text{m}(\text{B}\widehat{O}\text{C}) = 80°$. Se OM é a bissetriz de $A\widehat{O}$B, ON é a bissetriz de $B\widehat{O}$C e OX é a bissetriz de $M\widehat{O}$N, determine a medida do ângulo $X\widehat{O}$C.



Gabarito

1. a) $133°$, b) $145°40'$.

2. a) $\frac{1}{5}(90° - \alpha)$, b)$\frac{1}{10}(180° - \alpha)$.

3. $79°30'$.

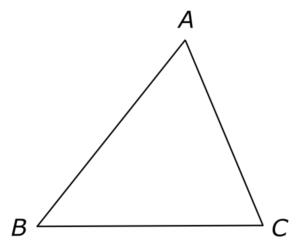
4. $30'$.

5. Demonstração.

6. $68°$.

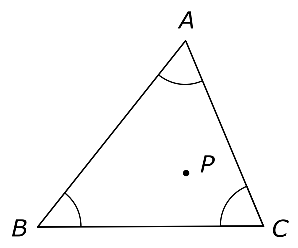
Triângulos

Definição: *T*riângulo é a união de três segmentos cujas extremidades são três pontos não colineares. A figura ao lado mostra um triângulo. Os pontos A, B e C são os vértices, e os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo. Denotamos por ΔABC um triângulo de vértices A, B e C.

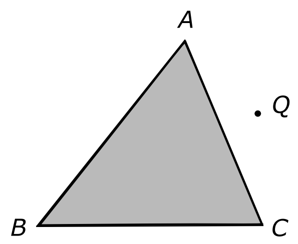


Definição: Chama-se *p*erímetro de um triângulo o número que exprime a soma das medidas dos três lados.
Notação: $2p$.

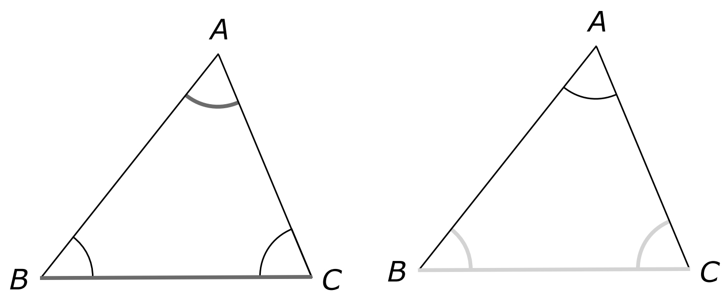
Definição: Os pontos comuns aos interiores dos ângulo $B\hat{A}$C, A$\widehat{B}$C e $A\widehat{C}$B são pontos interiores ao triângulo ABC. Na figura,o ponto P é interior ao triângulo. Os ângulos $B\hat{A}$C, A$\widehat{B}$C e $A\widehat{C}$B são os ângulos internos do triângulo.



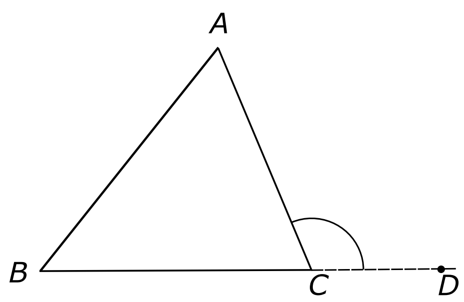
Definição: A união de um triângulo com o seu interior é chamada *r*egião triangular. Os pontos que não pertencem à região triangular são os pontos exteriores ao triângulo. Na figura, Q é um ponto exterior ao triângulo.



Definição: Num triângulo, *l*ado oposto a um ângulo é o lado que une os vértices dos dois outros ângulos, *l*ado adjacente a dois ângulos é o lado que une os vértices desses dois ângulos. Na figura, o lado BC é oposto ao ângulo $B\hat{A}C$, e o lado BC é adjacente aos ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$.



Definição: $\hat{A}$ngulo externo a um triângulo é aquele que é adjacente e suplementar a um de seus ângulos internos. Na figura ao lado, o ângulo $A\widehat{C}D$ é um ângulo externo ao triângulo ABC.

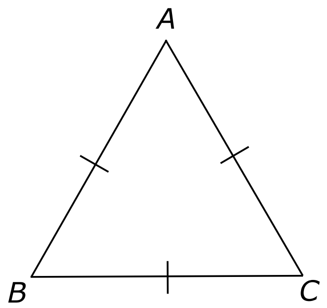


Classificação dos triângulos

Podemos classificar os triângulos de dois modos:

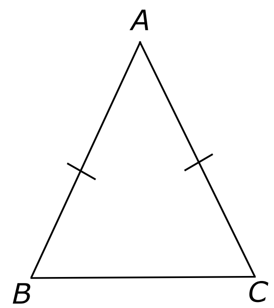
$1^{\underline{o}}$ Quanto aos lados:

– Equilátero: os que têm os três lados congruentes.



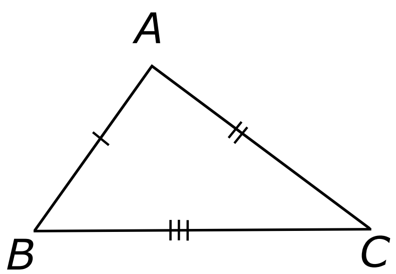
$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

– Isósceles: os que têm dois lados congruentes.



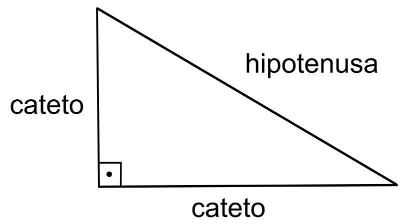
$\overline{AB} = \overline{AC}$

– Escaleno: os que têm os três lados não congruentes entre si.

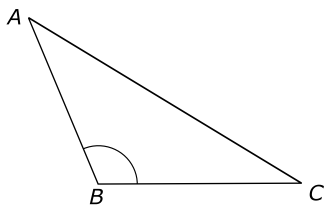


$2^{\underline{o}}$ Quanto aos ângulos:

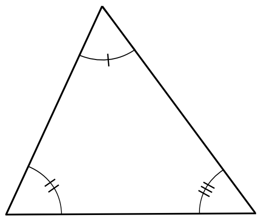
– Retângulos: quando têm um ângulo reto.



– Obtusângulos: quando têm um ângulo obtuso.

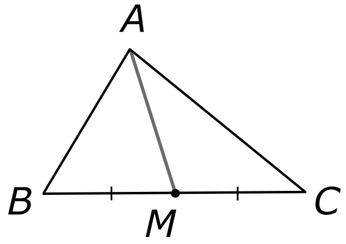


– Acutângulos: quando têm os três ângulos agudos.

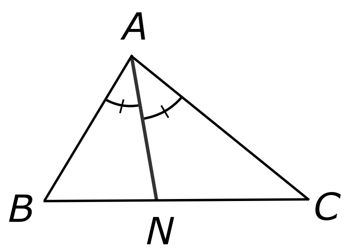


Elementos notáveis de um triângulo

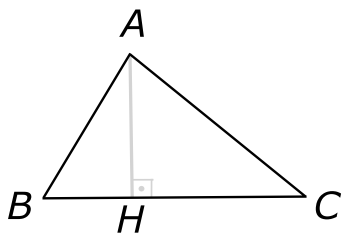
Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Na figura, AM é uma mediana do triângulo ABC.



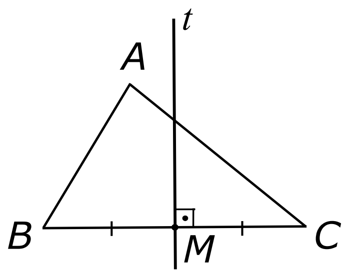
Bissetriz de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno que tem por extremidades o vértice desse ângulo e o ponto de encontro com o lado oposto. Na figura, AN é uma bissetriz do triângulo ABC.



*A*ltura de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujos extremos são esse vértice e o ponto de encontro com essa reta. Na figura, AH é uma altura do triângulo ABC.



*M*ediatriz de um triângulo é a mediatriz de um de seus lados. Na figura, a reta t é a mediatriz do lado BC do triângulo ABC.



Exercícios Resolvidos

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

a) Um triângulo possui três ângulos externos. ( )

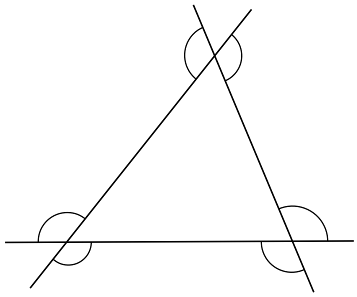
b) Um triângulo isósceles é sempre acutângulo. ( )

c) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles. ( )

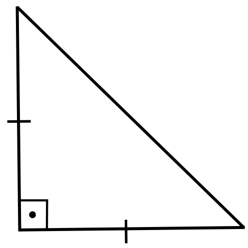
d) Um triângulo isósceles pode ser equilátero. ( )

Solução:

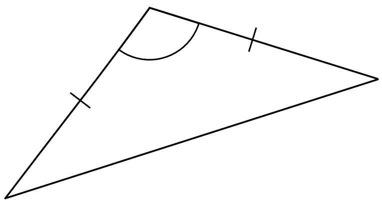
a) (F), pois possui seis ângulos externos.



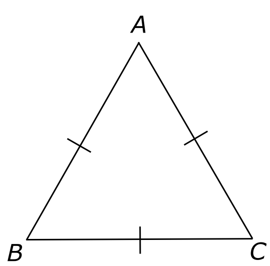
b) (F), pois existe triângulo isósceles que é triângulo retângulo, por exemplo.



c) (V), basta que o ângulo formado pelos lados congruentes seja obtuso.



d) (V), basta que possua os três lados congruentes.

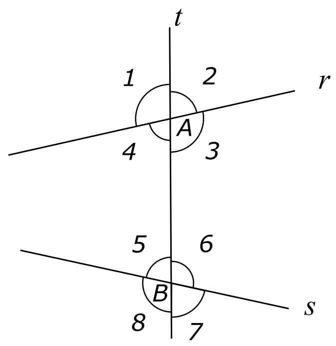


$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$

Retas paralelas

Lembre-se de que já vimos a definição de retas paralelas em posições relativas entre duas retas distintas e também o postulado 4. (Postulado de Euclides).

Definição: Duas retas r e s de um mesmo plano interceptados pela transversal t formam oito ângulos. Os pares de ângulos, um com vértice em A e o outro em B, conforme figura, são denominados:



$$\text{ângulos correspondentes: } \begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$$

$$\text{ângulos alternos internos } \begin{cases} \hat{4} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{5} \end{cases}$$

$$\text{ângulos alternos externos } \begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{cases}$$

$$\text{ângulos colaterais externos } \begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$$

$$\text{ângulos colaterais internos } \begin{cases} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{cases}$$

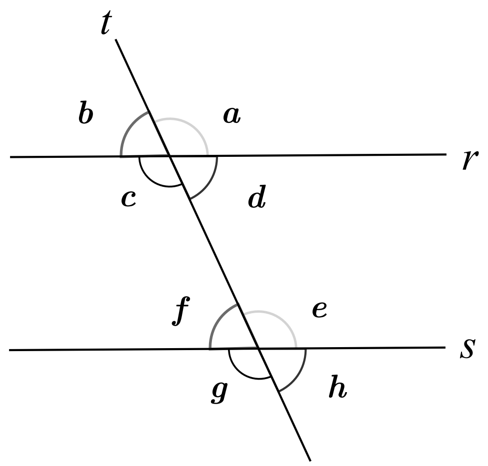
Vamos considerar verdadeira a propriedade a seguir, mas depois que estudarmos congruência, podemos demonstrar tal propriedade.

Propriedade: Uma reta transversal a duas retas paralelas formam ângulos que obedecem às relações seguintes:

1º Os ângulos correspondentes e os ângulos alternos são congruentes.

2º Os ângulos colaterais são suplementares.

Seja t uma transversal as retas r e s e $r \parallel s$.



$a = e, b = f, c = g, d = h$ (correspondentes)

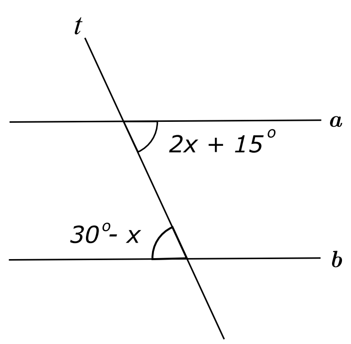
$c = e, d = f, a = g, b = h$ (alternos internos e alternos externos)

$c + f = d + e = b + g = a + h = 180°$ (colaterais)

Nota: As recíprocas das propriedades 1ºe 2º são verdadeiras.

Exercícios Resolvidos

1. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x.

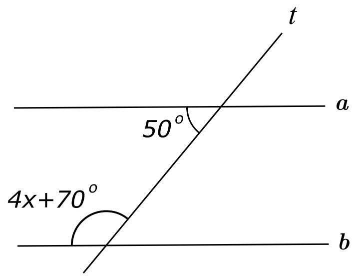


Solução:

Sendo $2x + 15°$ e $30° - x$ as medidas de dois ângulos alternos internos, temos:

$30° - x = 2x + 15° \Rightarrow -x - 2x = 15° - 30° \Rightarrow 3x = 15° \Rightarrow x = 5°$

2. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x.

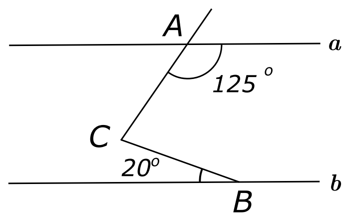


Solução:

Sendo $4x + 70°$ e $50°$ as medidas de dois ângulos colaterais internos, temos:

$4x + 70° + 50° = 180° \Rightarrow 4x = 180° - 120° \Rightarrow 4x = 60° \Rightarrow x = 15°$

3. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{C}\mathrm{B}$.



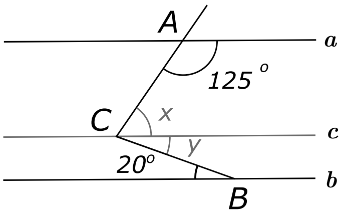
Solução:

Seja a figura dada. Trace por C uma reta $c \parallel a$, e seja $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{B}) = X+Y$ conforme a figura.

Logo $125° + X = 180°$ (ângulos colaterais internos) $\Rightarrow X = 55°$.

$Y = 20°$ (ângulos alternos internos).

Logo, $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{B}) = 55° + 20° = 75°$.

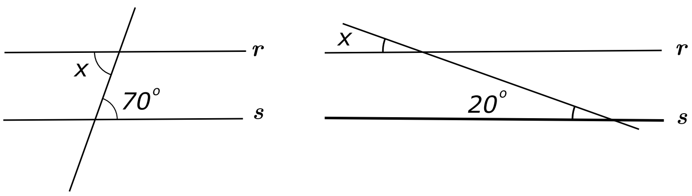


4. Duas retas distintas a e b de um plano, cortados por uma transversal t, formam ângulos colaterais internos, cujas medidas em graus são, respectivamente, $6X - 30^\circ$ e $2X + 34^\circ$. Determine X de modo que as retas a e b sejam paralelas.

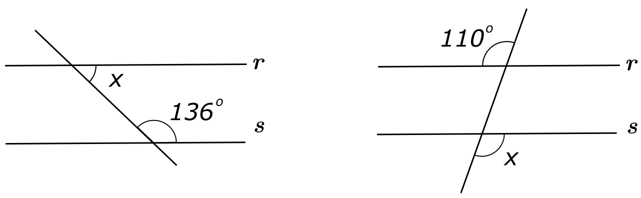
Solução:
Queremos que as retas a e b sejam paralelas, então $6X - 30^\circ + 2X + 34^\circ = 180^\circ$ (ângulos colaterais internos) $\Rightarrow 8X = 176^\circ \Rightarrow X = 22^\circ$.

Exercícios Propostos

1. Em cada figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x.

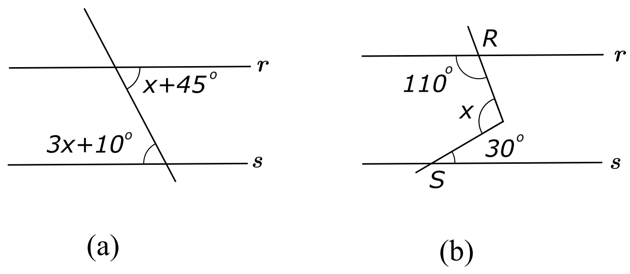


(a) (b)

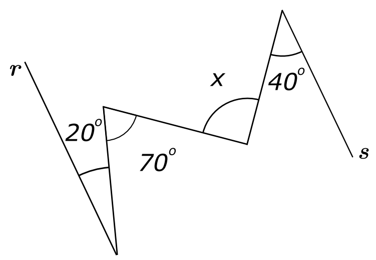


(c) (d)

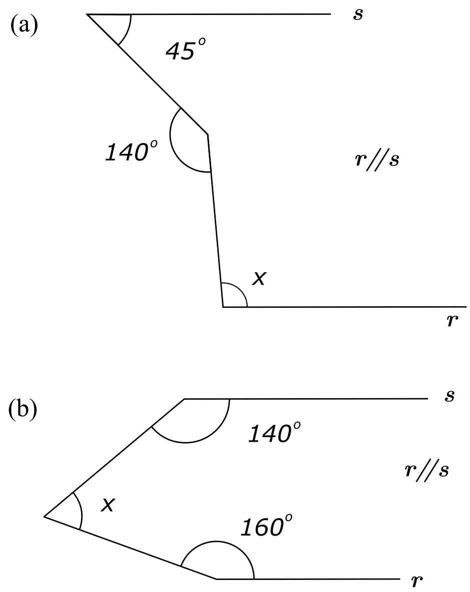
2. Em cada figura, a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x.



3. Seja na figura $r \parallel s$, calcule o valor de x.



4. Na figura a seguir, calcule x.



Gabarito

1. a) $x = 70°$, b) $x = 20°$, c) $x = 44°$, d) $x = 110°$.

2. a) $17°30'$, b) $100°$.

3. $x = 90°$.

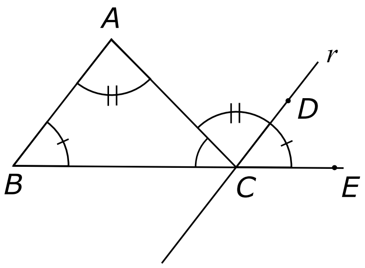
4. a) $x = 95°$, b) $x = 60°$.

Ângulos no triângulo

Teorema Angular de Tales: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Prova:

Seja ΔABC e considere uma reta $r \parallel AB$ passando por C.



Daí, $m(\text{A}\widehat{C}\text{D}) = \text{m}(\text{B}\hat{\text{A}}\text{C})$ (ângulo alterno interno)

$m(\text{E}\widehat{C}\text{D}) = \text{m}(\text{C}\widehat{B}\text{A})$ (ângulo correspondente)

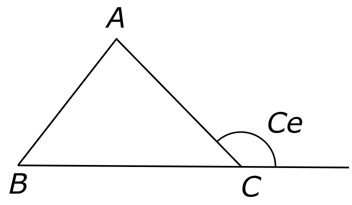
Como um ângulo raso tem 180°, vem:

$$\widehat{C} + \hat{\text{A}} + \widehat{B} = 180°$$

Corolário: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo tem medida igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova:

Seja o ΔABC, considere $\widehat{C}$e ângulo externo em relação ao vértice C.



Temos que:

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ & (1) \\ \widehat{C}e+\widehat{C}=180^\circ & (2) \end{cases}$$

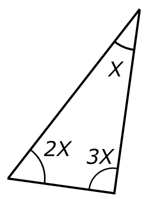
Subtraindo (1) de (2) vem:

$$\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}e=0 \Rightarrow \widehat{C}e=\widehat{A}+\widehat{B}$$

De forma similar $\widehat{B}e=\widehat{A}+\widehat{C}$, onde $\widehat{B}e$ é o ângulo externo em relação ao vértice B e $\widehat{A}e=\widehat{B}+\widehat{C}$, onde $\widehat{A}e$ é o ângulo externo em relação ao vértice A.

Exercícios Resolvidos

1. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de X.

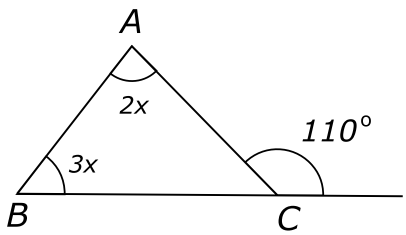


Solução:

Temos por Tales que: X + 2X + 3X $=180^\circ \Rightarrow 6$X $=180^\circ \Rightarrow X=30^\circ$

2. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de x.

Solução:



Pelo resultado do ângulo externo, vem:

$$2\text{x}+3\text{x} = 110^\circ \Rightarrow 5\text{x} = 110^\circ \Rightarrow \text{x} = 22^\circ$$

3. Dada a figura 1 a seguir, calcule o valor de x.

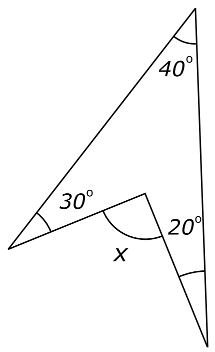


Fig. 1

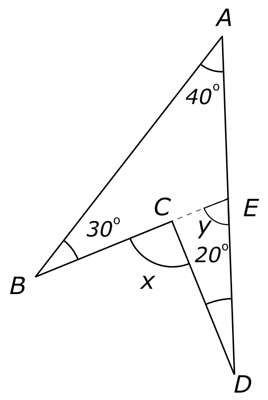


Fig. 2

Solução:

Considere A, B, C e D os vértices da figura dada. Prolongue BC até AD e denomine de E a interseção da reta BC com a reta AD.

Daí denominando $m(\hat{\text{CED}})$ = Y vem usando o resultado do ângulo externo no ΔABE,

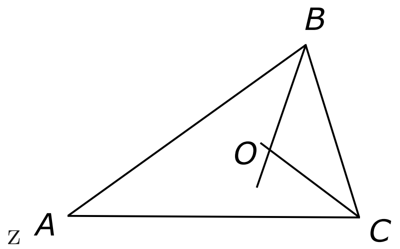
$$Y = 30^\circ + 40^\circ$$

e no ΔCED,

$$X = Y + 20^\circ \Rightarrow \ X \ = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$$

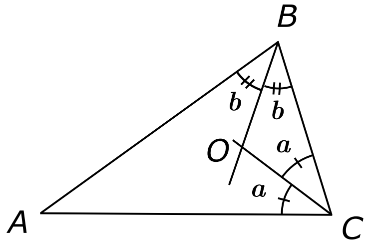
4. Na figura a seguir, O é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo ABC e a medida do ângulo $\mathrm{B\widehat{O}C}$ é o triplo da medida do ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$. Calcule a medida do ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$.

Solução:



Seja o Δ ABC, O o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo e $m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{C}) = 3\ m(\widehat{A})$.

Considere $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{O}) = \mathrm{m}(\mathrm{B}\widehat{C}\mathrm{O}) = a$ e $m(\mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{O}) = \mathrm{m}(\mathrm{C}\widehat{B}\mathrm{O}) = b$.



Daí

$$\begin{cases} 2b + 2a + m(\text{A}) = 180^\circ \\ b + a + 3m(\text{A}) = 180^\circ \quad (\text{x } 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 2a + m(\text{A}) = 180^\circ \quad (1) \\ 2b + 2a + 6m(\text{A}) = 360^\circ \quad (2) \end{cases}$$

Fazendo (2) - (1) vem:

6 m(A) - m(A) = 180° $\Rightarrow$ 5 m(A)= 180° $\Rightarrow$ m(A)= 36°

5. Na figura 1 a seguir, P é a interseção das bissetrizes externas em $\widehat{\text{B}}$ e $\widehat{\text{C}}$. Calcule a medida do ângulo $B\widehat{P}\text{C}$ sabendo que a medida do ângulo $\widehat{\text{A}}$ é 70°.

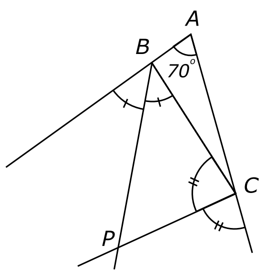


Fig. 1

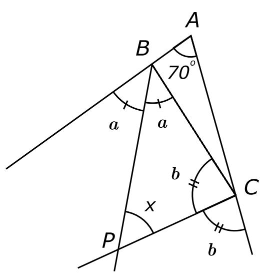


Fig. 2

Solução:

Seja a figura 1 dada, com P sendo a interseção das bissetrizes externas em $\widehat{\text{B}}$ e $\widehat{\text{C}}$ e m($\widehat{\text{A}}$) = 70°. Denote $\text{m}(\text{B}\widehat{\text{P}}\text{C}) = \text{X}, \text{m}(\text{C}\widehat{\text{B}}\text{P}) = \text{a}$ e $\text{m}(\text{B}\widehat{\text{C}}\text{P}) = b$.

Temos que:

$$m(\text{A}\widehat{B}\text{C}) = 180^\circ - 2a$$

$$m(\text{B}\widehat{C}\text{A}) = 180^\circ - 2b$$

Por Tales no Δ BCP vem: $a + b + X = 180^\circ$

Por Tales no Δ ABC vem:

$$180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b + 70^\circ = 180^\circ$$

Logo,

$$\begin{cases} a+b+X=180^\circ \\ 180^\circ-2a+180^\circ-2b+70^\circ=180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+X=180^\circ & (1) \\ -2a-2b=-250^\circ & (2) \end{cases}$$

De (2) temos que

$$2a+2b=250^\circ \Rightarrow a+b=125^\circ \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1) vem:

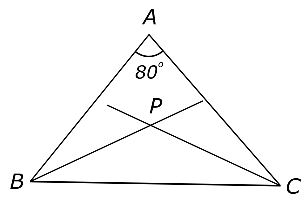
$$125^\circ+X=180^\circ \Rightarrow X=180^\circ-125^\circ=55^\circ$$

Logo,

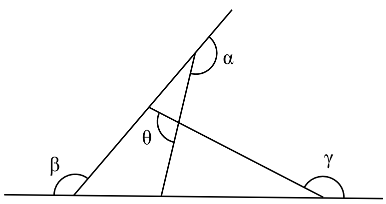
$$m(\mathrm{B}\widehat{P}\mathrm{C})=55^\circ$$

Exercícios Propostos

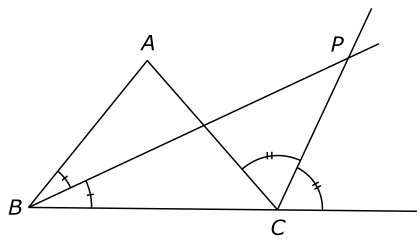
1. Na figura a seguir, P é a interseção das bissetrizes internas em $\widehat{\mathrm{B}}$ e $\widehat{\mathrm{C}}$. Calcule a medida do ângulo $\mathrm{B\widehat{P}C}$ sabendo que o ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$ mede 80°.



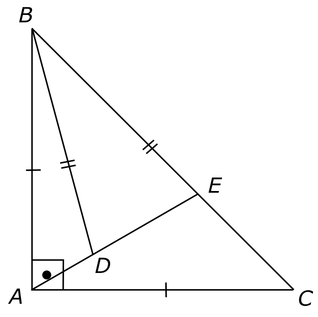
2. Na figura a seguir, calcule a soma dos quatro ângulos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ e $\widehat{\theta}$.



3. Na figura a seguir, P é a interseção da bissetriz interna de $\widehat{\mathrm{B}}$ com a externa de $\widehat{\mathrm{C}}$. Calcule o ângulo $\mathrm{B\widehat{P}C}$ em função de $\widehat{\mathrm{A}}$.

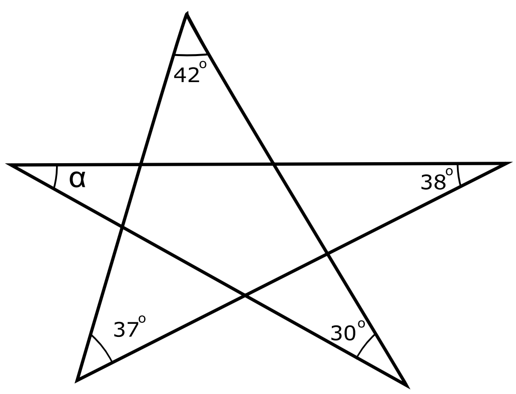


4. Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em $\widehat{\text{A}}$ e isósceles. Sendo $\overline{BD} = \overline{BE}$ e $\text{D}\widehat{\text{A}}\text{C} = 30°$, calcule a medida do ângulo $\text{A}\widehat{\text{B}}\text{D}$.

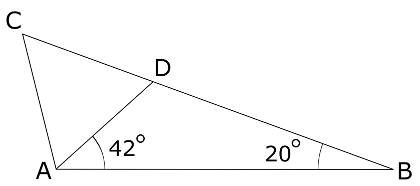


Nota: Nesta questão use o fato de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes. Este fato será provado na Aula 2.

5. Na figura a seguir, calcule o ângulo $\widehat{\alpha}$. Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.

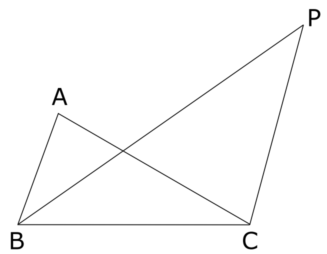


6. O triângulo ACD da figura é isósceles de base $\overline{AD}$. Sendo 42° a medida do ângulo $B\widehat{A}D$ e 20° a medida do ângulo $A\widehat{B}C$, calcule a medida do ângulo $A\widehat{C}D$.



7. Seja $A\widehat{O}B$ um ângulo e r uma reta do seu plano que contém O e situada na região não convexa. Seja $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos agudos $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ que formam com r. Se $A\widehat{O}B$ mede 150°, calcule o ângulo $X\widehat{O}Y$.

8. Na figura, P é a interseção da bissetriz interna de B com a bissetriz externa de C. Calcule o ângulo $B\widehat{P}C$ em função do ângulo $\widehat{A}$.



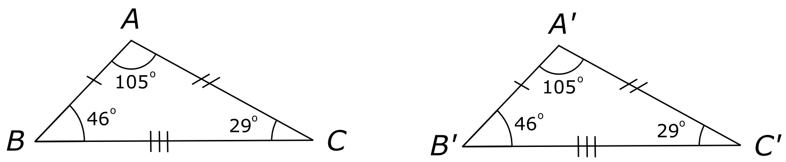
Gabarito

1. $m(\text{B}\widehat{P}\text{C}) = 130°$.
2. A soma pedida é 540°.
3. $m(\text{B}\widehat{P}\text{C}) = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$.
4. $m(\text{A}\widehat{B}\text{D}) = 15°$.
5. $m(\widehat{\alpha}) = 33°$.
6. $m(\text{A}\widehat{C}\text{D}) = 56°$.
7. $m(\text{X}\widehat{O}\text{Y}) = 165°$.
8. $m(\widehat{P}) = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Aula 2 – Congruência de Triângulos

A idéia de congruência entre segmentos, ângulos e triângulos formou-se intuitivamente, levando-se em conta que dois segmentos congruentes, dois ângulos congruentes e dois triângulos congruentes podem ser superpostos por meio de um deslocamento conveniente.

O conceito abstrato de congruência entre triângulos é definido da seguinte maneira:
Dois triângulos são denominados congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados e os três ângulos. Exemplo: Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são congruentes.



Indicamos: $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$ se $\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{cases}$ e $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$

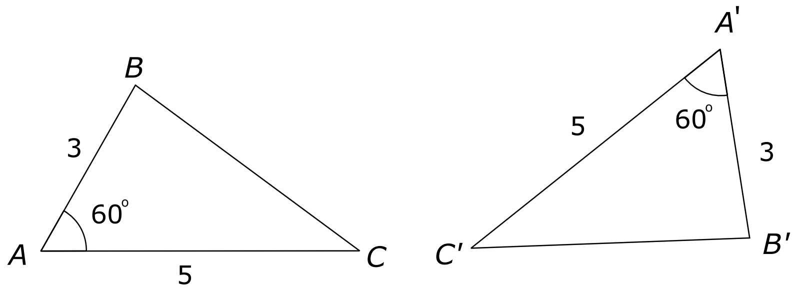
Observação:
Em dois triângulos congruentes, são congruentes entre si:
a) os lados opostos a ângulos congruentes;
b) os ângulos opostos a lados congruentes;

Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá 5 condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

1º Caso (LAL)
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.
Este caso é normalmente dado como *postulado* e indica que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes dois lados, então o lado restante e os dois ângulos também são ordenadamente congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LAL.



Esquema de aplicação.

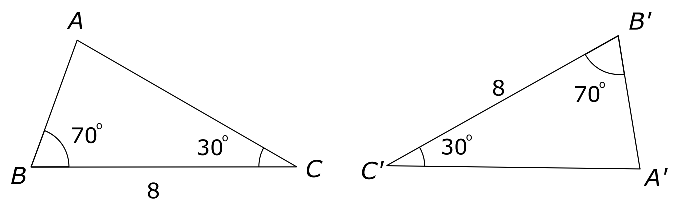
$$\left\{\begin{array}{c} AB \equiv A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

Os demais casos serão teoremas que inicialmente vamos apresentá-los. Alguns desses casos serão provados e alguns serão deixados como exercícios.

$2^{\underline{o}}$ Caso (ALA)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso ALA.



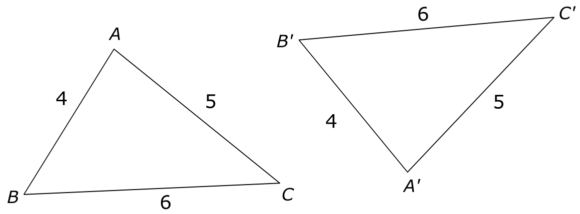
Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} AB \equiv A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right.$$

3º Caso (LLL)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LLL.

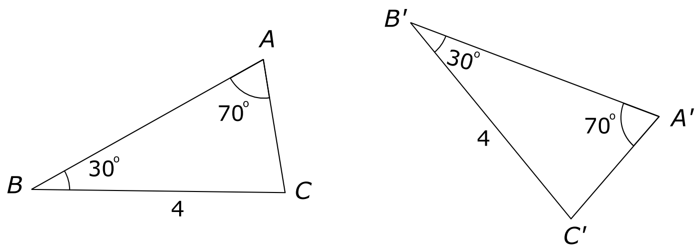


Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{array}\right. \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

4º Caso (LAAo)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.
Exemplo: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso LAAo.



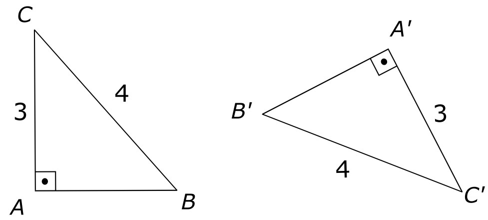
Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} BC \equiv B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right. \underset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{C} = \hat{C}' \\ AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right.$$

5º Caso (Caso Especial)

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes.

Exemplo: Os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são congruentes pelo caso especial.



Aplicação nos problemas

Se, ao resolver um problema, sabe-se que os elementos de dois triângulos verificam as condições de um dos casos de congruência:

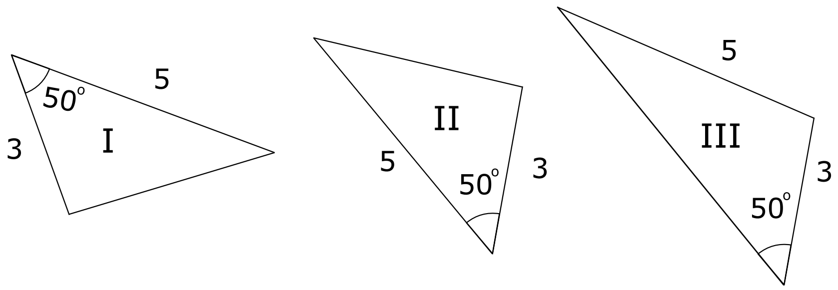
1º) pode-se afirmar que os triângulos são congruentes.

2º) conclui-se daí que os outros elementos desses triângulos, que não se conhecem, são dois a dois congruentes.

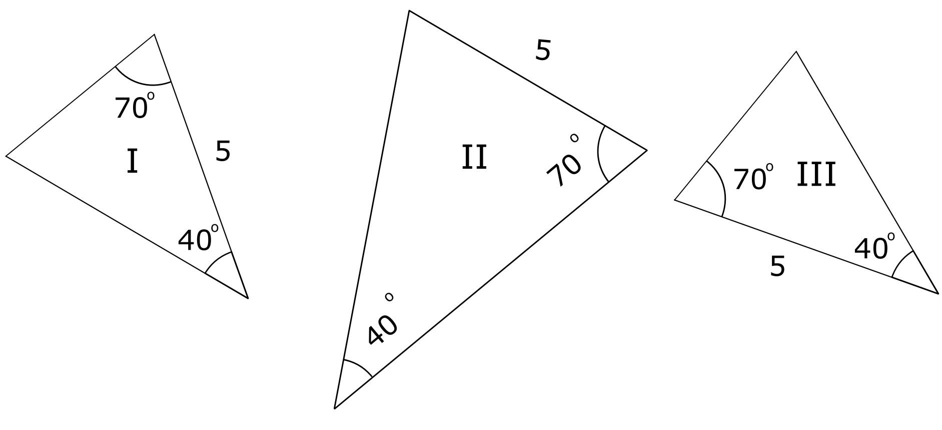
Exercícios Resolvidos

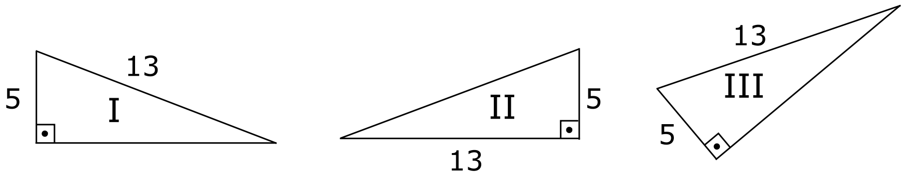
1. Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

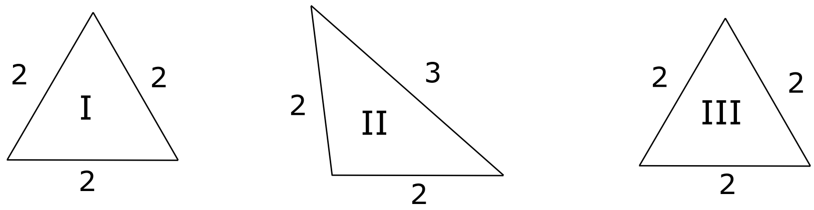
(a)

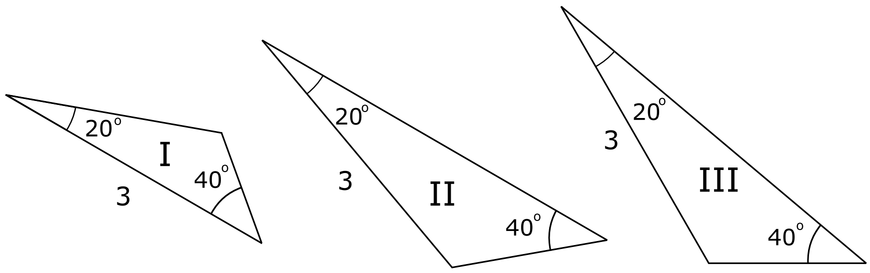


(b)



(c)


(d)


(e)


Solução:

(a) $\Delta I \equiv \Delta II$ pelo caso LAL.

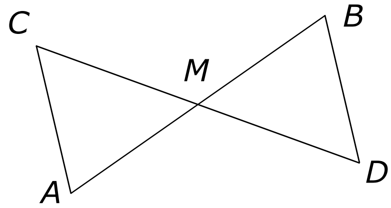
(b) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso ALA.

(c) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso especial.

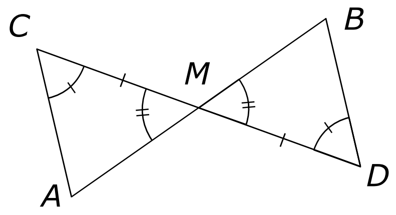
(d) $\Delta I \equiv \Delta III$ pelo caso LLL.

(e) $\Delta II \equiv \Delta III$ pelo caso LAAo.

2. Na figura, M é o ponto médio do segmento CD, ou seja, $CM \equiv MD$.
$A\hat{C}M \equiv B\hat{D}M$ e os pontos A, M e B são colineares.
Prove que $AM \equiv MB$.



Solução:
Seja a figura dada:



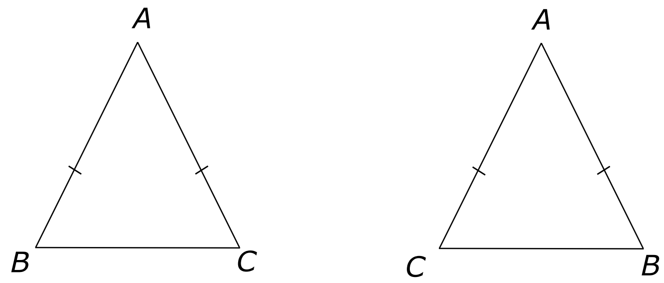
Temos que:

$$\left.\begin{array}{rl} A\hat{C}M & \equiv B\hat{D}M \text{ (hipótese)} \\ CM & \equiv DM \text{ (hipótese)} \\ A\hat{M}C & \equiv B\hat{M}D \text{ (opostos pelo vértice)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underset{\text{(ALA)}}{\Longrightarrow} \Delta ACM \equiv \Delta DBM \\ \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} AM \equiv MB \end{array}$$

Note que M é ponto médio do segmento AB.

3. Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Solução:
Seja o Δ ABC isósceles de base BC e o triângulo isósceles ACB, conforme figura.



Temos:

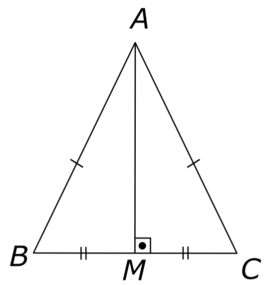
$$\left\{\begin{array}{rl} AB & \equiv AC \text{ (hipótese)} \\ \hat{A} & = \hat{A} \text{ (ângulo comum)} \\ AC & \equiv AB \text{ (hipótese)} \end{array}\right. \underset{\text{(LAL)}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \hat{B} = \hat{C}$$

4. Prove que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Solução:
Seja o triângulo isósceles de base BC. Tracemos a mediana AM relativa à base e provemos que AM é bissetriz e altura.

Considere os triângulos ABM e ACM, então:

$$\begin{cases} AB \equiv AC \text{ por ser isósceles do } \Delta ABC \\ BM \equiv CM \text{ (Definição de mediana)} \\ AM \equiv AM \text{ lado comum} \end{cases}$$



Pelo caso (LLL), temos $\Delta\ ABM \equiv \Delta\ ACM$.

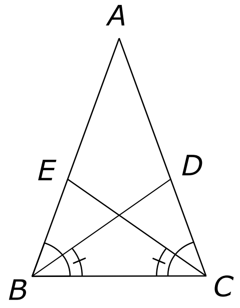
Da congruência desses dois triângulos decorrem:
1) $B\hat{A}M \equiv C\hat{A}M$ e daí AM é bissetriz.
2) $A\hat{M}B \equiv A\hat{M}C$ e que são ângulos adjacentes, congruentes e suplementares, então são retos.

Logo $AM \perp BC$ e portanto AM é altura.

5. Dado um triângulo isósceles ABC de base BC, considere as bissetrizes internas BD e CE desse triângulo. Prove que $BD \equiv CE$.

Solução:
Seja o triângulo isósceles ABC de base BC e as bissetrizes internas BD e CE.

Considere os triângulos BCD e CBE.



Temos que:

$$\left\{\begin{array}{rl} A\hat{B}C & \equiv A\hat{C}B \text{ (ângulos da base) Exercício 3} \\ BC & \equiv BC \text{ (comum)} \\ B\hat{C}E & \equiv C\hat{B}D \text{ (metade dos ângulos da base)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta BCD \equiv \Delta CBE$$

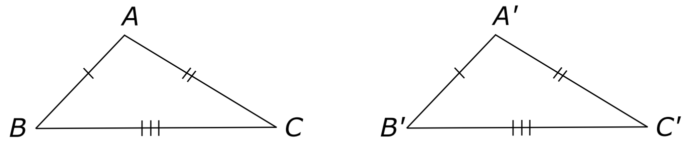
e daí $BD \equiv CE$ (definição de triângulos congruentes)

6. Demonstre o caso LLL.

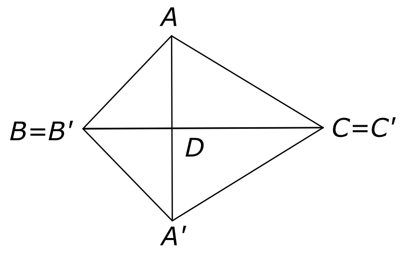
Solução:

Hipótese: $\left\{\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{array}\right.$ Tese: $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$.



Transportemos o $\Delta A'B'C'$ de modo que o lado $B'C'$ coincida com BC, ficando o vértice A' no semiplano oposto ao de A, em relação a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Unimos os pontos A e A', cujo segmento interceptará a reta suporte de lado BC num ponto D, conforme figura.



Dessa construção e sendo:

$$AB \equiv A'B' \quad \text{e} \quad AC \equiv A'C'$$

resulta que os triângulos *ABA'* e *ACA'* são isósceles e, portanto

$$B\hat{A}A' \equiv B\hat{A}'A \quad \text{e} \quad C\hat{A}A' \equiv C\hat{A}'A$$

Concluimos daí que

$$B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C'$$

ou seja,

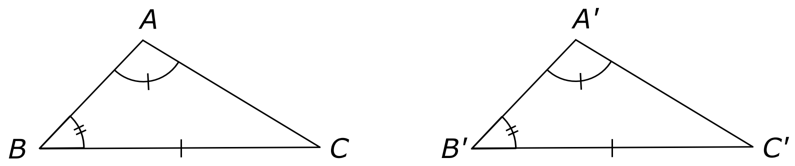
$$\hat{A} = \hat{A}'$$

Logo pelo caso LAL, temos:

$$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$$

7. Demonstre o caso LAAo.

Solução:
Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'* da figura e suponhamos $BC \equiv B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$.



Vamos provar que $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$.
Para provar essa congruência, basta provar que $AB \equiv A'B'$, recaindo no caso LAL.
Transportemos então o $\Delta\ A'B'C'$ sobre o $\Delta\ ABC$, caindo o lado $B'C'$ sobre seu congruente BC de modo a coincidirem os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$. Seja D a nova posição do ponto A', e provemos que D coincide com A.

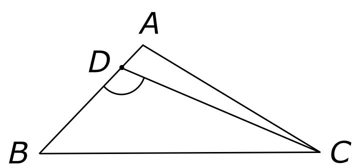
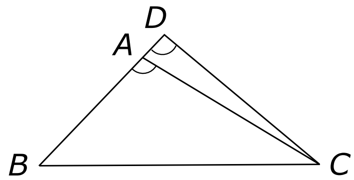


Fig. (∗)

De fato, a não coincidência de D com A conduz a um absurdo, pois se D ficasse entre B e A, Figura (*), o ângulo $B\hat{D}C$ externo em relação ao Δ CDA seria maior que $\hat{A}$ (resultado anterior) (1).
Por outro lado, se D ficasse no prolongamento de BA, teríamos $\hat{A}$ maior que $B\hat{D}C$ (resultado anterior) (2).

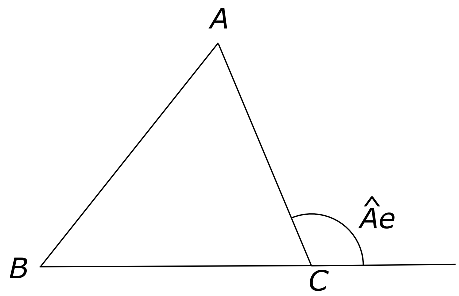


As desigualdades (1) e (2) são absurdas, pois por hipótese o ângulo $B\hat{D}C$, que é a nova posição do ângulo $\hat{A}$' após o deslocamento, é congruente ao ângulo $\hat{A}$.
Portanto o ponto A', estando sobre AB e não podendo ficar nem antes nem depois do ponto A, deverá coincidir com A.
Daí,

$$AB \equiv A'B'$$

Então, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo casos LAL.

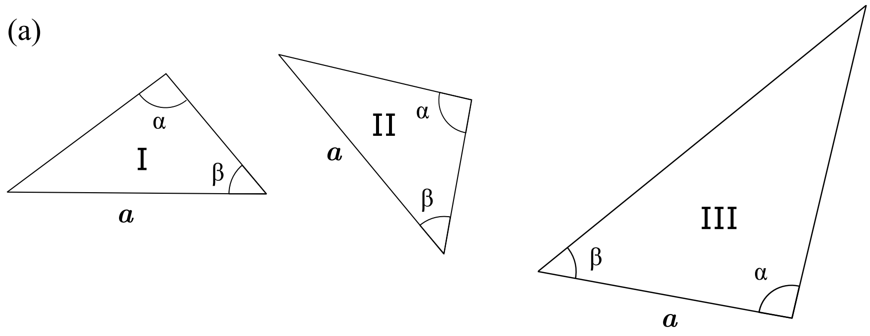
Nota:
Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer interno não adjacente, já que na Aula 1 vimos que: $\hat{A}e = \hat{B} + \hat{C}$.



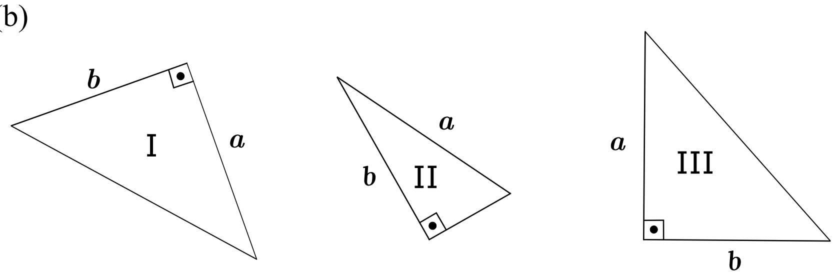
Exercícios Propostos

1. Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.

(a)



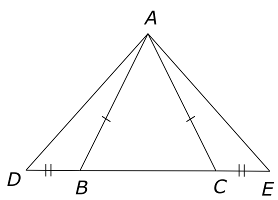
(b)



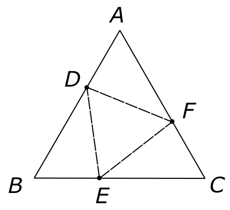
2. Prove que, se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

3. Prove que, se um triângulo tem os três ângulos congruentes entre si, então ele é equilátero.

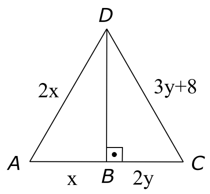
4. Considere o triângulo isósceles ABC da figura. Seja os segmentos BD e CE sobre a base BC congruentes entre si. Prove que o triângulo ADE é isósceles.



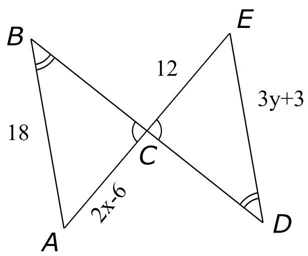
5. Sobre os lados de um triângulo equilátero, tomam-se três pontos D, E e F conforme figura. Sendo $AD \equiv BE \equiv CF$, prove que o triângulo DEF é equilátero.



6. Na figura, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcular x e y.

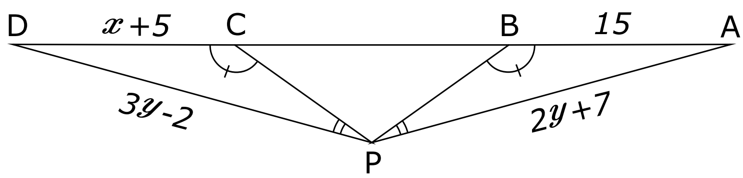


7. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.

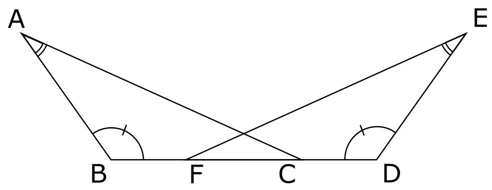


8. Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana e altura.

9. Na figura, o triângulo PCD é congruente ao triângulo PBA. Determine os valores de x, y e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD.



10. Na figura, sendo $\overline{BF} = \overline{CD}$, $m(A\widehat{B}C) = m(F\widehat{D}E)$ e $m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{E}F)$, prove que $\overline{AC} = \overline{EF}$.



11. Prove o caso ALA.

12. Prove o caso especial de congruência.

Gabarito

1. a) $\Delta I \equiv \Delta II$ Caso LAAo.
   b) $\Delta I \equiv \Delta III$ Caso LAL.

2. Demonstração.

3. Demonstração.

4. Demonstração.

5. Demonstração.

6. $x = 16$ e $y = 8$.

7. $x = 9$ e $y = 5$.

8. Demonstração.

9. $x = 10$, $y = 9$ e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD é 1.

10. Demonstração.

11. Demonstração.

12. Demonstração.

Aula 3 – Polígonos Convexos

Conjunto convexo

Definição: Um conjunto de pontos chama-se convexo se, quaisquer que sejam dois pontos distintos desse conjunto, o segmento que tem esses pontos por extremidades está contido nesse conjunto.
Exemplo 1: A figura 1 mostra um conjunto convexo, e a figura 2 mostra um conjunto não convexo.

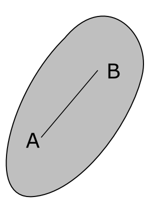


Fig. 1

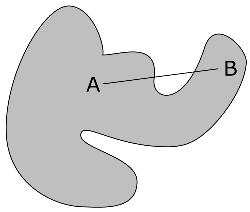


Fig. 2

Exemplo 2: O círculo é convexo, figura 1, e a circunferência, figura 2, não é convexa.

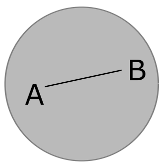


fig. 1

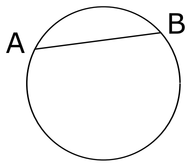
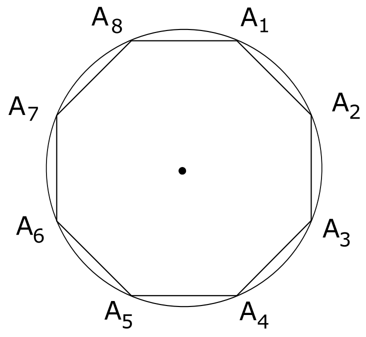


fig. 2

Polígono

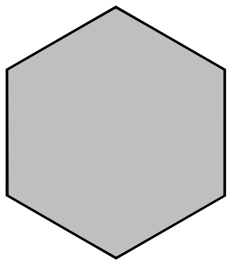
Definição: Consideremos um número n $(n \geq 3)$ de pontos ordenados $A_1, A_2, \ldots A_n$ de modo que três pontos consecutivos sejam não colineares e consideremos os segmentos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$. Denomina-se polígono a figura constituída pelos pontos dos n segmentos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$.
Exemplo: A figura mostra um polígono de 8 vértices ou 8 lados.



Região poligonal

Definição: A reunião de um polígono com o seu interior chama-se região poligonal ou superfície poligonal.

Exemplo: A figura mostra uma região poligonal.



Polígono convexo

Definição: Denomina-se polígono convexo àquele cujo interior é um conjunto convexo.

Exemplo: A figura 1 mostra um polígono convexo e a figura 2 mostra um polígono não convexo.

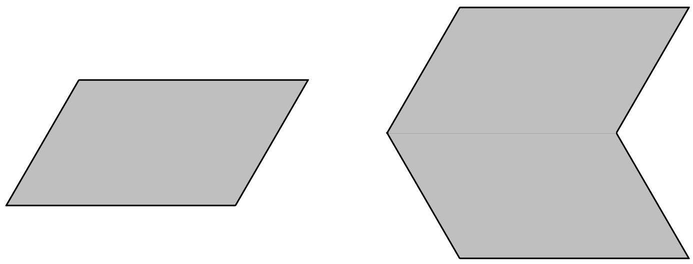


figura 1 figura 2

Classificação

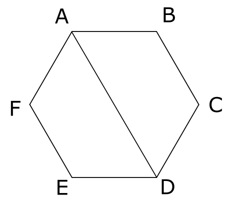
Os polígonos convexos, quanto ao número de lados n ($n \geq 3$) classificam-se em:

triângulo	$n = 3$	eneágono	$n = 9$
quadrilátero	$n = 4$	decágono	$n = 10$
pentágono	$n = 5$	undecágono	$n = 11$
hexágono	$n = 6$	dodecágono	$n = 12$
heptágono	$n = 7$	$\vdots$	$\vdots$
octógono	$n = 8$	icoságono	$n = 20$

Diagonal

Definição: Chama-se diagonal de um polígono convexo todo segmento que une dois vértices não consecutivos.

Exemplo: Na figura o segmento AD é uma diagonal do polígono ABCDEF.



Perímetro

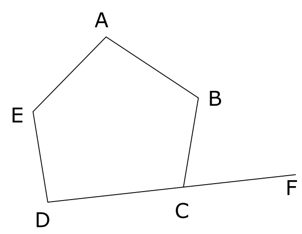
Definição: O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono.

Notação: $2p$.

Ângulos

Definição: Chama-se ângulo interno de um polígono convexo o ângulo formado por dois lados do mesmo vértice.

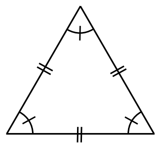
Exemplo: Na figura, o ângulo $\mathsf{A\hat{B}C}$.

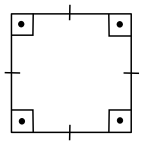


Definição: Chama-se ângulo externo de um polígono convexo o ângulo formado por um lado qualquer e o prolongamento do lado adjacente.
Exemplo: Na figura anterior, o ângulo $\mathsf{B\hat{C}F}$.

Polígono regular

Definição: Chama-se polígono regular todo polígono convexo que tem:
(a) todos os lados congruentes entre si.
(b) todos os ângulos congruentes entre si.
Exemplos: Um triângulo equilátero. Um quadrado.



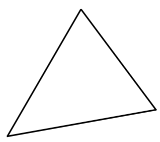


Número de diagonais

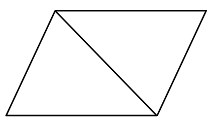
O número d de diagonais distintas de um polígono convexo de n $(n \geq 3)$ lados é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

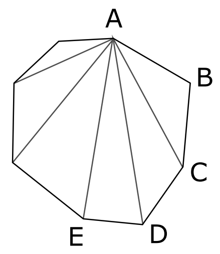
Considere o triângulo, $n = 3$:
Temos que o número de diagonais que sai de cada vértice é: 0.



Ou seja, $d_v = 3 - 3 = 0$.
Considere o quadrilátero, $n = 4$:
O número de diagonais que sai de cada vértice é 1, ou seja, $d_v = 1 = 4 - 3$



Considere o polígono convexo de n lados:



temos que o número de diagonais que sai de cada vértice é $n - 3$,

$$d_v = n - 3.$$

Como cada diagonal tem extremidades em dois vértices, cada diagonal foi contada duas vezes.
Daí, o número d de diagonais é: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o número de diagonais de um pentadecágono convexo.

Solução:
Temos

$$n = 15 \Rightarrow d = \frac{15(15-3)}{2} = 90.$$

2. Qual é o polígono convexo que possui 65 diagonais?

Solução:
Temos que

$$d = 65 \Rightarrow 65 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n = 130$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 130 = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+520}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+23}{2} = 13 \\ \\ \dfrac{3-23}{2} = -10 \text{ (não serve).} \end{cases}$$

Logo, o polígono pedido é o polígono de 13 lados.

3. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é igual ao quádruplo do número de lados?

Solução:
Temos que

$$d = 4n \Rightarrow 4n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Como $n \neq 0$, temos que:

$$n - 3 = 8 \Rightarrow n = 11.$$

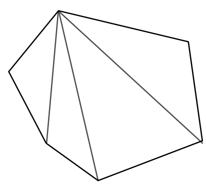
O polígono convexo é o undecágono.

Soma dos ângulos internos

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n $(n \geq 3)$ lados é:

$$S_i = 180^\circ(n-2).$$

Prova:
Seja um polígono convexo de n lados. De um vértice qualquer tracemos todas as diagonais que têm esse vértice como um dos extremos e consideremos os $n-2$ triângulos assim formados.



A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é exatamente igual à soma das medidas dos ângulos internos desses $n-2$ triângulos.
Daí,

$$S_i = (n-2)180^\circ.$$

Exemplo: A soma das medidas dos ângulos internos de um icoságono convexo é:

$$S_i = (20-2)180^\circ = 3240^\circ.$$

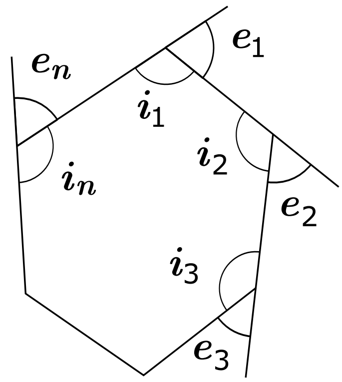
Soma dos ângulos externos

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo de $n (n \geq 3)$ lados é $360°$.

Prova:

Seja um polígono convexo de n lados, e sejam i_1 e e_1, i_2 e $e_2, \cdots, i_n$ e e_n, respectivamente, o ângulo interno e ângulo externo considerados de cada vértice.

Temos:



$$\begin{cases} i_1 + e_1 &= 180° \\ i_2 + e_2 &= 180° \\ \vdots & \vdots \quad (+) \\ i_n + e_n &= 180° \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_i + S_e = 180°n \Rightarrow S_e &= 180°n - S_i = 180°n - 180°(n-2) = \\ &= 180°n - 180°n + 360° = 360° \\ &\Rightarrow S_e = 360°. \end{aligned}$$

Exemplo: A soma das medidas dos ângulos externos de um dodecágono é:

$$S_e = 360°.$$

Ângulos de um polígono regular

Seja um polígono regular de n lados, e considere as medidas dos ângulos internos de a_i e as medidas dos ângulos externos de a_e. Então:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{360°}{n}.$$

Exercícios Resolvidos

4. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono convexo.

Solução:
Temos $n = 9$ e $S_i = (9-2)180° = 1260°$.

5. Calcule a medida do ângulo externo de um octógono regular.

Solução:
Temos $n = 8$ e $a_e = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

6. Calcule a medida do ângulo interno de um decágono regular.

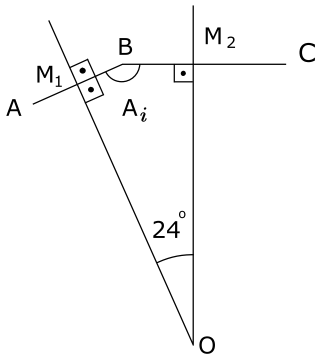
Solução:
Temos $n = 10$ e $a_i = \dfrac{180(10-2)}{10} = 18 \cdot 8 = 144°$.

7. O ângulo interno de um polígono regular é nove vezes o seu ângulo externo. Qual é esse polígono?

Solução:
Temos $a_i = 9 \cdot a_e \Rightarrow \dfrac{180(n-2)}{n} = 9\dfrac{360°}{n} \Rightarrow n - 2 = 18 \Rightarrow n = 20$.
Portanto, o polígono é o icoságono.

8. As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Determine o número de diagonais desse polígono.

Solução:
Considere o ângulo de 24° entre as mediatrizes de dois lados consecutivos do polígono regular.



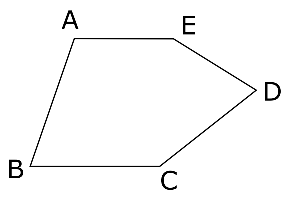
Temos que no quadrilátero M_1BM_2O a soma dos ângulos internos é $360°$, então

$A_i + 90° + 90° + 24° = 360° \Rightarrow A_i = 156° = \dfrac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 156°n = 180°n - 360° \Rightarrow 24n = 360 \Rightarrow n = 15.$

Daí, o número de diagonais é

$$d = \frac{15(15-3)}{2} = 90.$$

9. A figura, mostra um pentágono convexo $ABCDE$. Sendo AE paralelo a BC, calcule o valor de $\hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$.



Solução:

Vamos determinar a soma dos ângulos internos desse pentágono convexo.

$$S_i = 180°(5-2) = 540°$$

Como $AE \parallel BC$, temos que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais internos. Então,

$$\hat{A} + \hat{B} = 180°.$$

Logo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540° \quad \text{e} \quad \hat{A} + \hat{B} = 180°$$

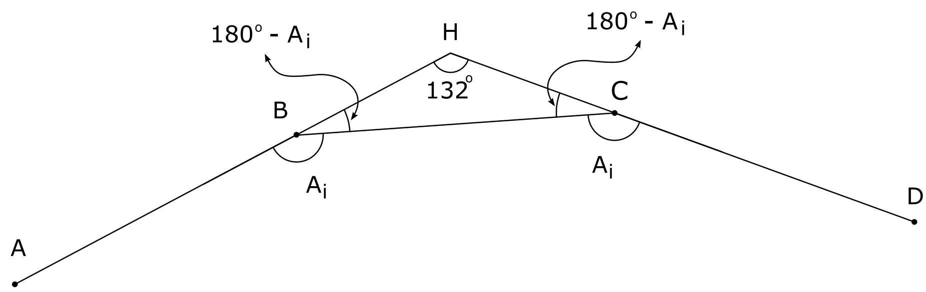
$$\Rightarrow \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540° - 180° = 360°.$$

Daí,

$$\hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360°.$$

10. Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono regular $ABCDE\cdots$, obtém-se um ângulo de 132°. Qual é esse polígono?

Solução:
Seja o polígono regular e prolongue os lados AB e CD obtendo-se um ângulo de 132°.



No ΔHBC vem:

$$132° + 180° - A_i + 180° - A_i = 180°$$

$$2A_i = 312° \Rightarrow A_i = 156° = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$\Rightarrow 156°n = 180°n - 360° \Rightarrow 24°n = 360°$$

$$\Rightarrow n = 15.$$

Portanto, o polígono é o pentadecágono.

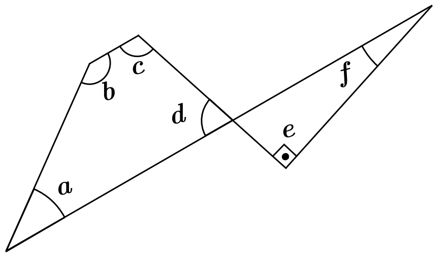
Exercícios Propostos

1. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um undecágono convexo.

2. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1080°. Calcule o número de diagonais desse polígono.

3. Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede 190°. Determine o maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

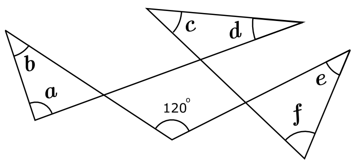
4. Na figura, os ângulos a, b, c e d medem, respectivamente, $\frac{x}{2}, 2x, \frac{3x}{2}$ e x. O ângulo e é reto. Qual é a medida do ângulo f?



5. Num polígono regular convexo $ABCDE\cdots$, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 18°. Calcule o número de lados do polígono.

6. Seja $ABCD\cdots$ um polígono regular. Calcule o número de diagonais desse polígono sabendo que as diagonais AC e BD formam um ângulo de 20°.

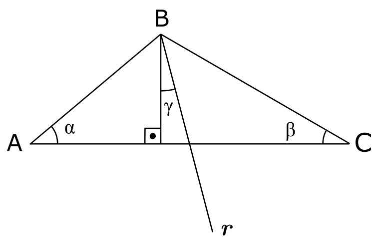
7. Na figura, detemine a soma das medidas dos ângulos $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \hat{f}$.



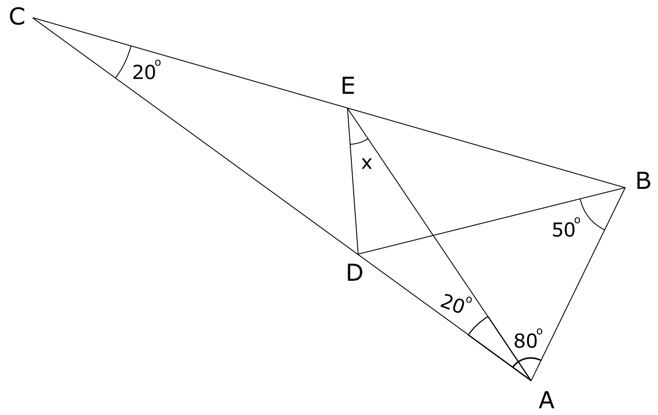
8. Os lados de um polígono regular de n lados, $n > 4$, são prolongados para formar uma estrela. Determine o número de graus em cada vértice da estrela.

9. Achar dois polígonos regulares cuja razão entre os ângulos internos é $\frac{3}{5}$ e a razão entre o número de lados é $\frac{1}{3}$.

10. Na figura, r é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Se $\alpha = 40°$ e $\beta = 30°$, determine a medida do ângulo γ.



11. Dado o triângulo isósceles ABC de base AB, calcule o valor de x.



12. Dados dois polígonos regulares com $n+1$ lados e n lados, respectivamente, determine n sabendo que o ângulo interno do polígono de $n+1$ lados excede o ângulo interno do polígono de n lados de $5°$.

13. Um polígono convexo tem cinco lados mais que o outro. Sabendo-se que o número total de diagonais vale 68, determine o número de diagonais de cada polígono.

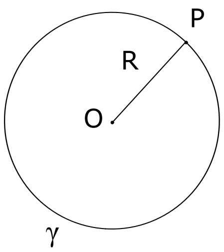
Gabarito

1. $1620°$.
2. 20.
3. $95°$.
4. $18°$.
5. 20.
6. 135.
7. $300°$.
8. $\dfrac{180°(n-4)}{n}$.
9. Os polígonos são o quadrado e o dodecágono regular.
10. $\gamma = 5°$.
11. $x = 30°$.
12. $n = 8$.
13. 14 e 54.

Aula 4 – Ângulos em uma Circunferência

Circunferência

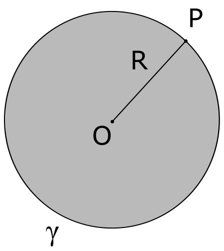
Definição: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo desse plano é uma constante positiva.
A figura representa uma circunferência γ de centro em O e raio de medida R, ou seja,



$$\gamma = \{P \in \gamma \quad \overline{OP} = R\}$$

Círculo

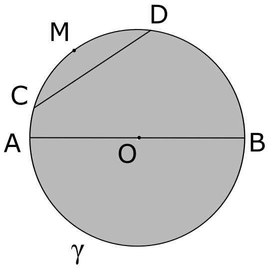
Definição: Círculo é a reunião de uma circunferência com o seu interior.
A figura, representa um circulo γ de centro em O e raio de medida R, ou seja,



$$\gamma = \{P \in \gamma \quad \overline{OP} \leq R\}$$

Elementos de um círculo

Seja o círculo de centro O da figura.



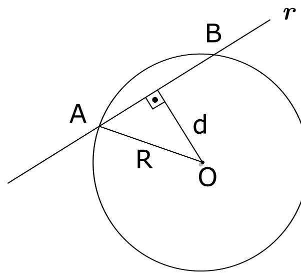
Temos:
AO - raio
AB - diâmetro
CD - corda
$\overset{\frown}{CMD}$ - arco

Sendo R a medida do raio, temos : $\overline{AO} = R$ e $\overline{AB} = 2\ R$.

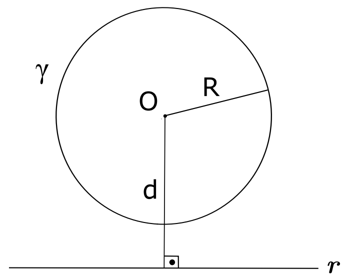
Posições relativas de reta e circunferência

Seja uma reta r, uma circunferência γ de centro em O e raio R, e d a distância do centro O à reta r. A reta e a circunferência podem ocupar entre si uma das três posições:

1ª posição: A reta r é secante à circunferência γ, isto é, a reta tem dois pontos distintos comuns com a circunferência nos pontos A e B.
Note que $d < R$ e $r \cap \gamma = \{A, B\}$.

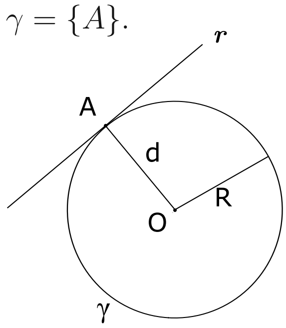


2ª posição: A reta r é exterior à circunferência γ, isto é, r não tem ponto comum com γ. Todos os pontos da reta r são exteriores à circunferência γ.



3ª posição: A reta r é tangente à circunferência γ, isto é, a reta tem um só ponto comum com a circunferência, e os outros pontos da reta são exteriores à circunferência.

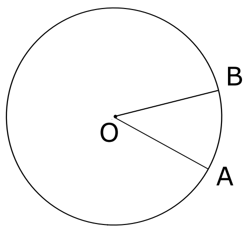
Note que $d = R$ e $r \cap \gamma = \{A\}$.



Teorema: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que tem uma extremidade no ponto de tangência.
A recíproca é verdadeira.
Nota: Vamos provar este teorema na *Aula 6*.

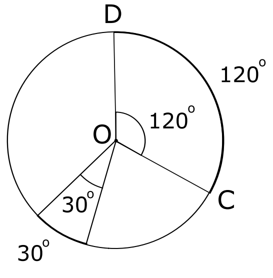
Ângulo central

Definição: Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.
Na figura, o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central da circunferência de centro O.
O arco $\overset{\frown}{AB}$ situado no interior do ângulo $A\hat{O}B$ é denominado arco correspondente.

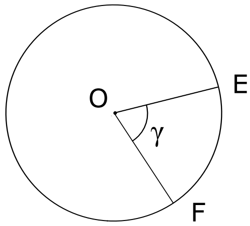


Medida do ângulo central e do arco correspondente

Se tomarmos para unidade de arco (arco unitário) o arco definido na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos:
A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.
Considerando a circunferência de centro O:
1) Se $m(A\hat{O}B) = 30^\circ$, então $m(\overset{\frown}{AB}) = 30^\circ$, e reciprocamente;
$A\hat{O}B = 30^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 30^\circ$.
2) Se $m(C\hat{O}D) = 120^\circ$, então $m(\overset{\frown}{CD}) = 120^\circ$ e reciprocamente;
$C\hat{O}D = 120^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 120^\circ$.

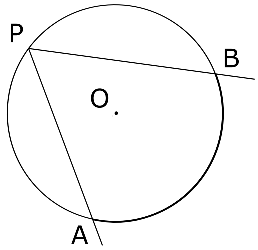


Observação:
Para simplificar a simbologia, na maioria dos casos, vamos confundir um arco AB com sua medida $m(\overset{\frown}{AB})$, indicando ambos por $\overset{\frown}{AB}$.
Na figura $\gamma = \overset{\frown}{EF}$



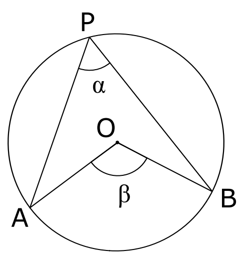
Ângulo inscrito

Definição: Ângulo inscrito em uma circunferência é o ângulo que tem o vértice nessa circunferência e os lados secantes a mesma.
Na figura, o ângulo $A\hat{P}B$ é inscrito na circunferência γ. O arco $\overset{\frown}{AB}$ situado no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.



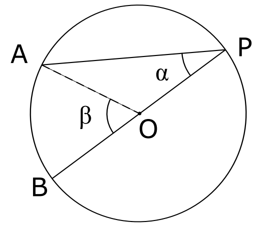
Teorema: Um ângulo inscrito é a metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.
Seja $A\hat{P}B$ o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β.

Vamos provar que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

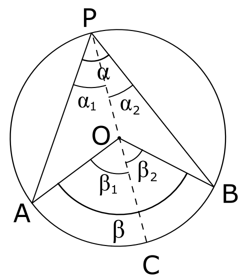


Prova: Temos três casos a considerar:

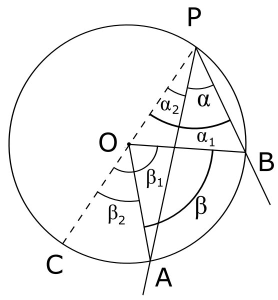
$1^{\underline{o}}$ caso: O está em um lado do ângulo.



$2^{\underline{o}}$ caso: O é interno ao ângulo.



$3^{\underline{o}}$ caso: O é externo ao ângulo.



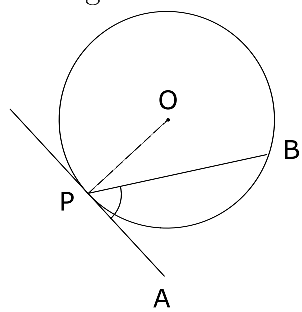
No $1^{\underline{o}}$ caso:
$\overline{OP} = \overline{OA}$ (raio) $\Rightarrow \Delta\ OPA$ é isósceles $\Rightarrow \hat{P} = \alpha = \hat{A}$
β é ângulo externo no $\Delta\ OAP \Rightarrow \beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$
Logo $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

No $2^{\underline{o}}$ caso:
Sendo C o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência e sendo:
$A\hat{P}C = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$, $C\hat{P}B = \alpha_2$ e $C\hat{O}B = \beta_2$, temos pelo $1^{\underline{o}}$ caso que
$\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow \beta = 2\alpha$.
Logo $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

No $3^{\underline{o}}$ caso:
Sendo C o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência e sendo:
$B\hat{P}C = \alpha_1$, $B\hat{O}C = \beta_1$, $A\hat{P}C = \alpha_2$ e $A\hat{O}C = \beta_2$,
temos pelo $1^{\underline{o}}$ caso que
$\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \beta = 2\alpha$.
Daí $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

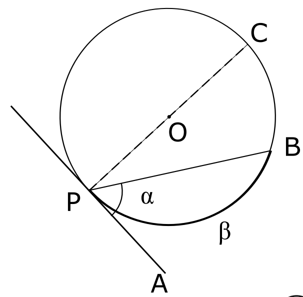
Ângulo de segmento

Definição: Ângulo de segmento é o ângulo que tem o vértice em uma circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.
A figura mostra um ângulo de segmento $A\hat{P}B$.



O arco $\overset{\frown}{PB}$ no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.

Teorema: A medida de um ângulo de segmento é igual a metade da medida do arco correspondente.
Prova:
Seja a figura, sendo α a medida do ângulo de segmento $A\hat{P}B$ e β a medida do arco correspondente $\overset{\frown}{AB}$, temos que provar que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.



Temos que o ângulo $A\hat{P}C$ é reto, e como o arco $\overset{\frown}{PBC}$ é uma semi-circunferência, temos que $m(A\hat{P}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{PC})}{2}$ (1).

Por outro lado $m(B\overset{\frown}{PC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ (2).

Subtraindo as duas relações, vem:

$m(\hat{APC}) - m(\widehat{BPC}) = \dfrac{m(\widehat{PC})}{2} - \dfrac{m(\widehat{BC})}{2} \Rightarrow$

$$m(A\hat{P}B) = \frac{m(\widehat{PC}) - m(\widehat{BC})}{2} \Rightarrow m(A\hat{P}B) = \frac{m(\widehat{PB})}{2}, \text{ ou seja,}$$

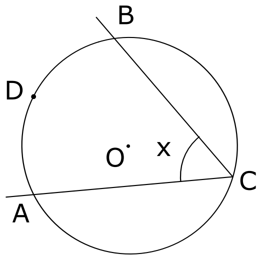
$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Obs:

Note que consideramos o ângulo α agudo. Faça o teorema com α reto e obtuso.

Exercícios Resolvidos

1. Na figura, o arco $\widehat{ADB}$ mede 110°. Calcule o valor de x.

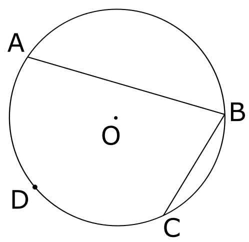


Solução:

Sendo x a medida do ângulo inscrito $A\hat{C}B$ vem:

$x = \dfrac{m(\widehat{ADB})}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°.$

2. Na figura, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 75°. Calcule a medida do arco $\widehat{ADC}$.



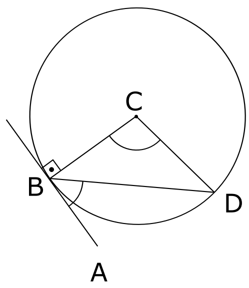
Solução:

$A\hat{B}C$ é ângulo inscrito $\Rightarrow m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ADC})}{2}$

$\Rightarrow m(\overset{\frown}{ADC}) = 2 \cdot 75° = 150°$.

Logo $m(\overset{\frown}{ADC}) = 150°$.

3. Na figura, o ângulo $B\hat{C}D$ mede 100°. Calcule a medida do ângulo $A\hat{B}D$.



Solução:

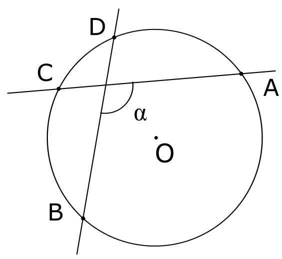
O ângulo $A\hat{B}D$ é um ângulo de segmento, então

$m(A\hat{B}D) = \dfrac{m(B\hat{C}D)}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$.

Note que $B\hat{C}D = \overset{\frown}{BD}$, já que o ângulo $B\hat{C}D$ é central.

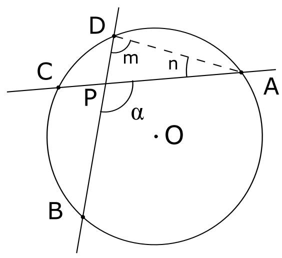
Daí $m(A\hat{B}D) = 50°$.

Definição: *Ângulo excêntrico interno* é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no interior da circunferência, fora do centro.
Na figura, α é um ângulo excêntrico interno.



4. Considere a figura anterior. Mostre que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$.

Solução:
Consideremos a figura dada.



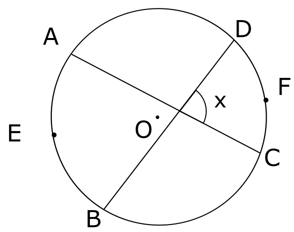
α - ângulo excêntrico interno.
Considere o $\Delta\ PAD \Rightarrow \alpha$ - ângulo externo do $\Delta\ PAD$.
Considere $P\hat{D}A = m$ e $P\hat{A}D = n$, então $\alpha = m + n \quad (1)$.
Mas m e n são ângulos inscritos, então

$$m = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \quad (2) \qquad \text{e} \qquad n = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \quad (3).$$

Substituindo (2) e (3) em (1) vem:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

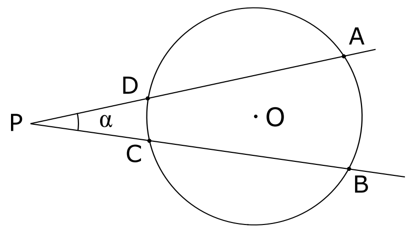
5. Na figura, o arco $\overset{\frown}{AEB}$ mede 100°, e o arco $\overset{\frown}{CFD}$ mede 60°. Calcule o valor de x.



Solução:
O ângulo x é excêntrico interno, usando o exercício 4, vem:

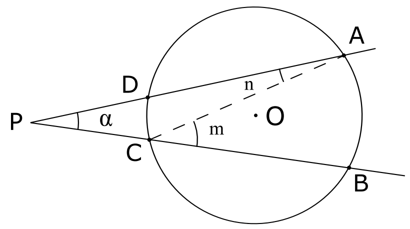
$$x = \frac{100° + 60°}{2} = 80°.$$

Definição: *Ângulo excêntrico externo* é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no exterior da circunferência.
Na figura, α é um ângulo excêntrico externo.



6. Considere a figura anterior. Mostre que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$

Solução:
Consideremos a figura dada:



α - ângulo excêntrico externo.
Considere o $\Delta\ PAC$. Seja $B\hat{C}A = m$ e $D\hat{A}C = n$ (ângulos inscritos), m é ângulo externo do $\Delta\ PAC$

$$m = \alpha + n \Rightarrow \alpha = m\text{-}n \quad (1).$$

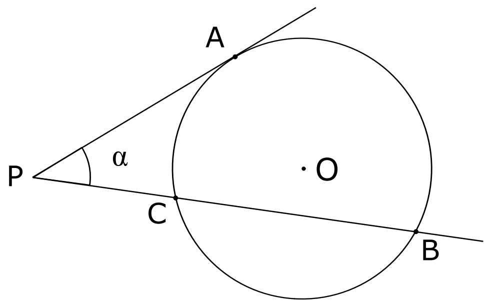
Temos que:

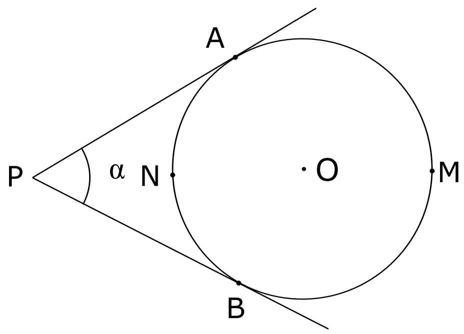
$$m = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \quad (2) \qquad \text{e} \qquad n = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \quad (3).$$

Substituindo (2) e (3) em (1) vem:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

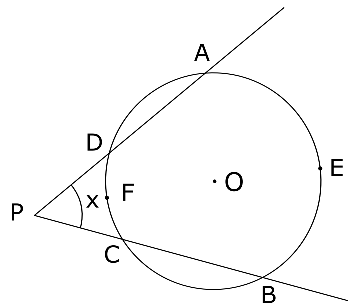
Obs:
Esta relação continua válida nos casos em que um ou ambos os lados são tangentes ao círculo.





$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{2} \qquad\qquad \alpha = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2}$$

7. Na figura, o arco $\overset{\frown}{AEB}$ mede 140°, e o arco $\overset{\frown}{CFD}$ mede 30°. Calcule o valor de x.

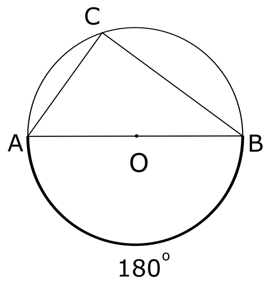


Solução:
O ângulo x é excêntrico externo, usando o exercício 6, vem:

$$x = \frac{140° - 30°}{2} = 55°.$$

8. Considere uma circunferência de centro O e um diâmetro AB. Tome um ponto C, qualquer dessa circunferência, distintos de A e B. Calcule a medida do ângulo $A\hat{C}B$.

Solução:
De acordo com o enunciado, temos a figura:

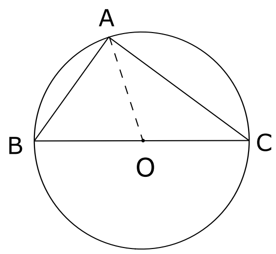


O diâmetro AB divide a circunferência em duas semi-circunferências de medida 180°, cada uma. Sendo $A\hat{C}B$ inscrito, temos:

$$m(A\hat{C}B) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

9. Mostre que em um triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa tem medida igual à metade da medida da hipotenusa.

Solução:
Seja ABC o triângulo retângulo e AO a mediana relativa à hipotenusa BC. Vamos mostrar que $\overline{AO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

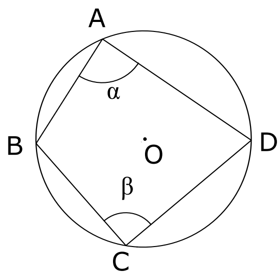


De fato, o ângulo $B\hat{A}C$, sendo reto, está inscrito em uma circunferência e seus lados AB e AC passam pelos extremos B e C de um diâmetro dessa circunferência. (exercício 8).
Temos que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ como raios de uma mesma circunferência. Daí $\overline{AO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Definição: Um quadrilátero convexo é chamado inscrito em uma circunferência se os quatro vértices pertencem a essa circunferência.

10. Mostre que, em todo quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência, os ângulos opostos são suplementares.

Solução:
Seja o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência conforme a figura.

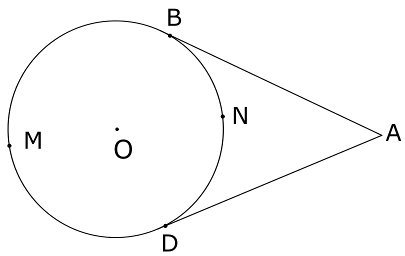


Denotamos por $\alpha = B\hat{A}D$ e $\beta = B\hat{C}D$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta = 180^\circ$.
De fato,
$m(\overset{\frown}{BCD}) = 2\alpha$ e $m(\overset{\frown}{BAD}) = 2\beta$
e como $m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BAD}) = 360^\circ$ vem:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Obs: A recíproca do exercício 10 é verdadeira.

11. Na figura, AB e AD são tangentes a circunferência de centro O. Sabendo-se que o arco $\overset{\frown}{BMD}$ mede 190°, calcule a medida do ângulo $B\hat{A}D$.



Solução:
Considere a figura dada no enunciado. Temos que:

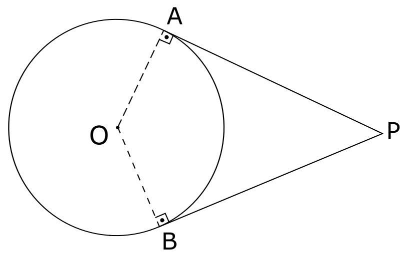
$$m(\overset{\frown}{BMD}) + m(\overset{\frown}{BND}) = 360^\circ \Rightarrow m(\overset{\frown}{BND}) = 360^\circ - 190^\circ = 170^\circ.$$

Do (exercício 6 OBS) vem:

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BMD} - \overset{\frown}{BND}}{2} = \frac{190^\circ - 170^\circ}{2} = 10^\circ.$$

12. Seja a circunferência γ de centro O e um ponto P exterior a γ. Trace pelo ponto P as semi-retas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a γ nos pontos A e B. Mostre que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Solução:
De acordo com o enunciado temos a figura:

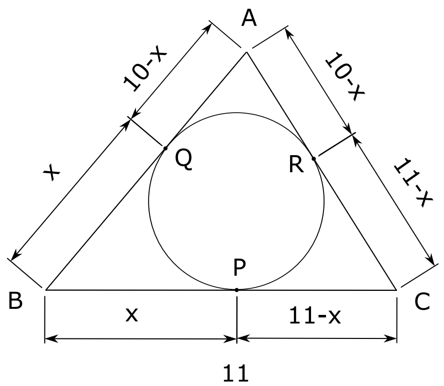


Os triângulos PAO e PBO são congruentes pelo Caso Especial, já que

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AO} = \overline{BO} \\ OP = OP \text{ (lado comum)} \\ O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^\circ \end{array}\right. \quad \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

13. Seja um triângulo ABC, a circunferência γ de centro O inscrita nesse triângulo, e P o ponto de tangência de γ com o lado BC. Sendo $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 11$ e $\overline{AC} = 9$, quanto mede $\overline{BP}$?

Solução:
De acordo com o enunciado, temos a figura a seguir:



Temos que:

$$\begin{cases} \overline{BP} = \overline{BQ} = x \\ \overline{AQ} = \overline{AR} = 10 - x, \text{pelo exercício 12} \\ \overline{CP} = \overline{CR} = 11 - x. \end{cases}$$

Daí

$$10 - x + 11 - x = 9 \Rightarrow 12 = 2x \Rightarrow x = 6.$$

Logo,

$$\overline{BP} = 6.$$

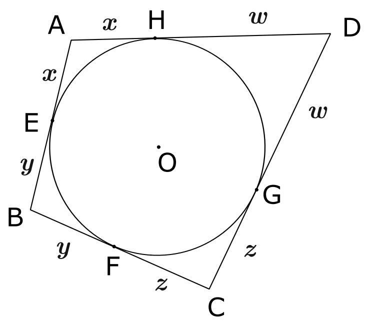
Definição: Um quadrilátero convexo é circunscritível a uma circunferência se os quatro lados são tangentes a essa circunferência.

14. Em todo quadrilátero convexo circunscritível a uma circunferência, a soma das medidas dos lados opostos são iguais.

Solução:
Seja o quadrilátero $ABCD$ circunscritível a uma circunferência de centro O, onde E, F, G e H são os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente.
Vamos provar que:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Pelo exercício 12 temos:



$\overline{AE} = \overline{AH} = x;$
$\overline{CF} = \overline{CG} = z;$
$\overline{BE} = \overline{BF} = y;$
$\overline{DG} = \overline{DH} = w;$
Logo :

$\overline{AB} + \overline{CD} = x + y + w + z \quad (1)$

$$\overline{AD} + \overline{BC} = x + w + y + z \quad (2)$$

De (1) e (2):

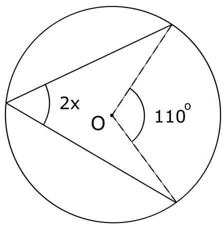
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Este resultado é conhecido como *Teorema de Ptolomeu ou Hiparco.*

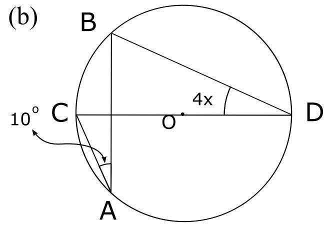
Exercícios Propostos

1. Nas figuras, calcule o valor de x.

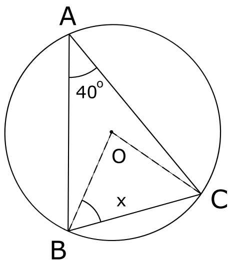
(a)



(b)

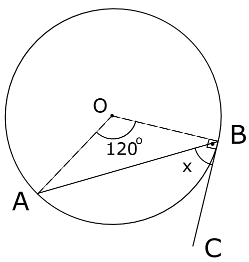


(c)

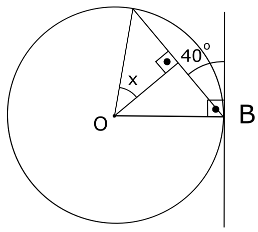


2. Nas figuras, calcule o valor e x.

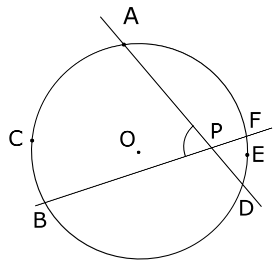
(a)



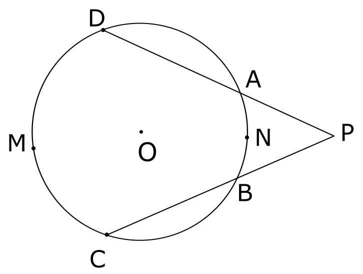
(b)



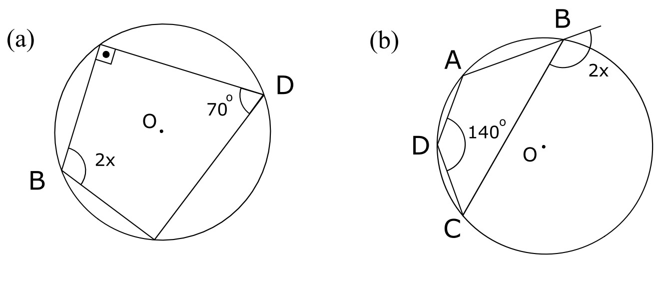
3. Na figura, o arco $\overset{\frown}{ACB}$ mede 100°, e o arco $\overset{\frown}{DEF}$ mede 36°. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{P}B$.



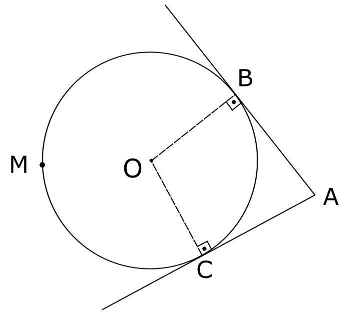
4. Na figura, o arco $\overset{\frown}{CMD}$ mede 120°, e o arco $\overset{\frown}{ANB}$ mede 24°. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{P}B$.



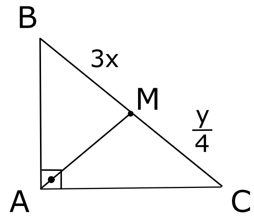
5. Nas figuras, calcule o valor de x.



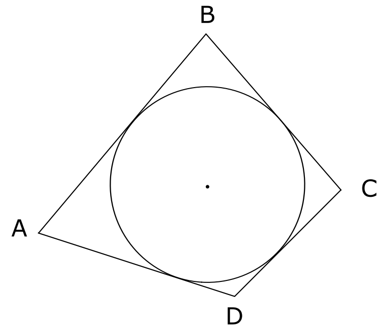
6. Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são tangentes à circunferência e $B\hat{A}C = 80°$. Calcule a medida do arco $\overset{\frown}{BMC}$.



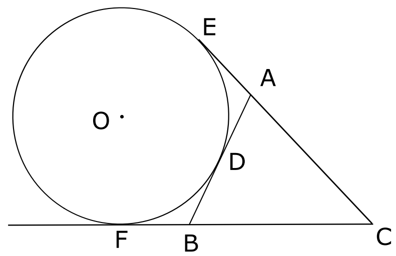
7. Na figura, sendo M o ponto médio da hipotenusa BC do triângulo ABC, e $\overline{AM} = 10$, calcule x e y.



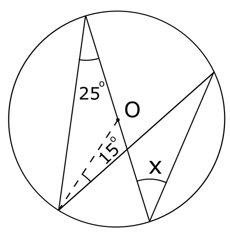
8. Na figura, o quadrilátero $ABCD$ é a circunscritível à circunferência de centro O. Sendo $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 8$ e $\overline{CD} = 6$, calcule $\overline{AD}$.



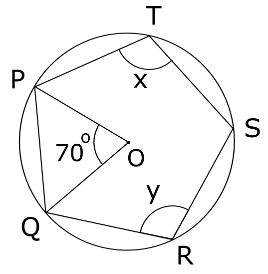
9. Na figura, os segmentos AB, CE e CF são tangentes à circunferência de centro O. Sendo $\overline{CE} = 4$, calcule o perímetro do triângulo ABC.



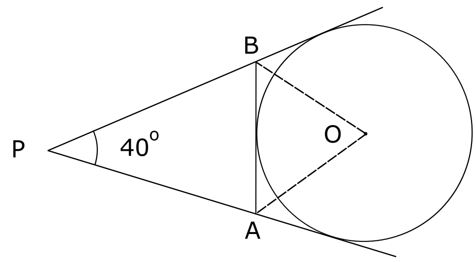
10. Seja a circunferência de centro O, representado na figura. Determine o valor de x.



11. Seja o pentágono $PQRST$ da figura, inscrito na circunferência de centro O. Sabe-se que o ângulo $P\hat{O}Q$ vale 70°; chamando-se de x e y os ângulos $P\hat{T}S$ e $Q\hat{R}S$, respectivamente, determine $x + y$.

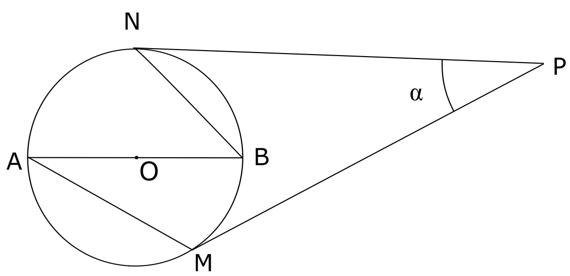


12. O triângulo PAB é formado por três tangentes ao círculo de centro O e $A\hat{P}B = 40°$. Calcule o ângulo $A\hat{O}B$.



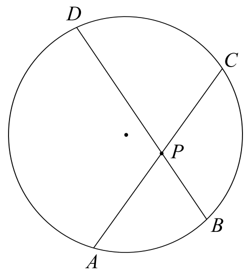
13. ABC é um triângulo cujos ângulos medem $40°, 60°$ e $80°$. Circunscreve-se ao triângulo uma circunferência, e à circunferência um novo triângulo MNP que toca a circunferência nos pontos A, B e C. Calcule o menor ângulo do triângulo MNP.

14. Na figura, AB é um diâmetro, a corda $\overline{AM}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito e $\overline{BN}$ o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo α, formado pelas tangentes PM e PN.



15. Determine o raio do círculo inscrito num triângulo retângulo de semi-perímetro 24 cm e hipotenusa 20 cm.

16. Na figura, a medida do ângulo $A\hat{C}D$ mede 70° e a medida do ângulo $A\hat{P}D$ mede 110°. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.



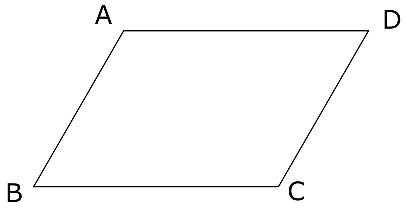
Gabarito

1. (a) $x = 27°30'$, (b) $x = 2°30'$, (c)$x = 50°$.
2. (a) $x = 60°$, (b) $x = 40°$.
3. 68°.
4. 48°.
5. (a) $x = 55°$, (b) $x = 70°$.
6. 260°.
7. $x = \dfrac{10}{3}$ e $y = 40$.
8. 8.
9. 8.
10. $x = 40°$.
11. 215°.
12. 70°.
13. 20°.
14. 30°.
15. O raio do círculo inscrito é 4 cm.
16. $m(B\hat{A}C) = 40°$.

Aula 5 – Quadriláteros Notáveis

Paralelogramo

Definição: É o quadrilátero convexo que possui os lados opostos paralelos.
A figura mostra um paralelogramo $ABCD$.



Teorema 1: Se ABCD é um paralelogramo, então:

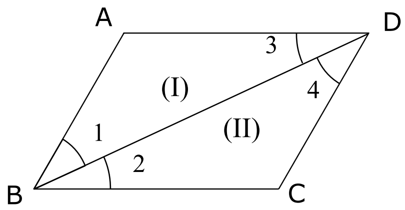
i) Os lados opostos são congruentes.

ii) Os ângulos opostos são congruentes.

iii) Dois ângulos consecutivos são suplementares.

iv) As diagonais cortam-se ao meio.

Prova: Seja o paralelogramo ABCD da figura:



i) Tracemos a diagonal BD e consideremos os triângulos (I) e (II), assim formados. Temos:

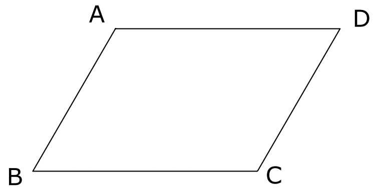
$$\left\{\begin{array}{l} \hat{1} \equiv \hat{4} \text{ (alternos internos)} \\ BD \equiv BD \text{ (comum)} \\ \hat{3} \equiv \hat{2} \text{ (alternos internos)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta I = \Delta II \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \equiv CD \\ \text{ e} \\ BC \equiv AD \end{array}\right.$$

ii) Se $\Delta I = \Delta II$ (item i), então $\hat{A} \equiv \hat{C}$, pois são ângulos opostos a lados congruentes em triângulos congruentes.

Por outro lado:

$$\begin{array}{l} \hat{1} \equiv \hat{4} \Rightarrow m(\hat{1}) = m(\hat{4}) \\ \hat{2} \equiv \hat{3} \Rightarrow m(\hat{2}) = m(\hat{3}) \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m(\hat{1}) + m(\hat{2}) = m(\hat{4}) + m(\hat{3}) \Rightarrow \\ m(\hat{B}) = m(\hat{D}) \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \end{array}\right.$$

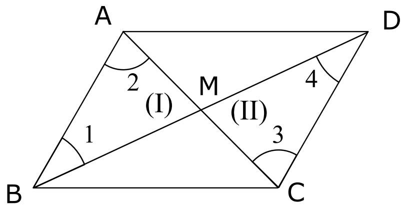
iii) Seja o paralelogramo $ABCD$.



Temos que:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ \end{cases} \text{(ângulos colaterais internos)}$$

iv) Seja o paralelogramo $ABCD$, tracemos as diagonais AC e BD, que se cortam em um ponto M.



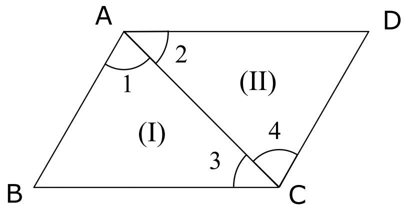
$$\begin{cases} \hat{1} \equiv \hat{4} \text{ (alternos internos)} \\ AB \equiv CD \text{ (item i)} \\ \hat{3} \equiv \hat{2} \text{ (alternos internos)} \end{cases} \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta I = \Delta II \Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = \overline{MC} \\ \text{e} \\ \overline{BM} = \overline{MD} \end{cases}$$

$\Rightarrow M$ é ponto médio das diagonais AC e BD.

OBS: Todo quadrilátero convexo que gozar de uma das propriedades acima será um paralelogramo e gozará de todas as outras propriedades.

Teorema 2: Se um quadrilátero convexo tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.
Prova:
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AD \parallel BC$ e $AD \equiv BC$.

Tracemos a diagonal AC e sejam os triângulos (I) e (II). Temos:



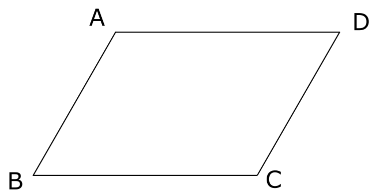
$$\left\{\begin{array}{l} AC \equiv AC \text{ (comum)} \\ \hat{2} \equiv \hat{3} \text{ (alternos internos)} \\ AD \equiv BC \text{ (hipótese)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta I \equiv \Delta II \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{4}$$

Logo, os lados AB e CD do quadrilátero são paralelos.
Daí, $AD \parallel BC$ e $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ é um paralelogramo.

Exercícios Resolvidos

1. Em um paralelogramo $ABCD$, o ângulo $\hat{A}$ mede $50°$. Determine os outros três ângulos desse paralelogramo.

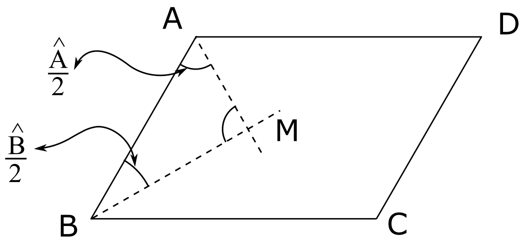
Solução: Seja $ABCD$ um paralelogramo e $\hat{A} = 50°$.



Usando (ii) e (iii) do teorema 1, vem:
$\hat{A} + \hat{B} = 180°$ e $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$
$\Rightarrow \hat{B} = 130°, \hat{C} = 50°$ e $\hat{D} = 130°$.

2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

Solução: Seja $ABCD$ o paralelogramo da figura e $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BM}$ as bissetrizes dos ângulos consecutivos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.



Temos que:

$$\frac{\hat{A}}{2} + \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \quad (1)$$

Do teorema 1(iii),

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \quad (2).$$

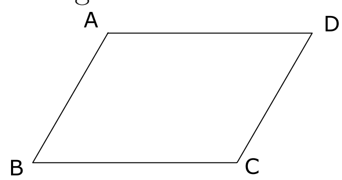
Substituindo (2) em (1), vem:

$$\hat{M} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Daí, o ângulo pedido é 90°.

3. Em um paralelogramo $ABCD$, $\overline{AB} = 2x + 1, \overline{BC} = 3x + 4, \overline{CD} = 9$ e $\overline{AD} = y + 1$. Calcule os valores de x e y.

Solução: Seja o paralelogramo $ABCD$.



Pelo teorema 1(item i) vem: $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{BC} = \overline{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 9 \\ 3x + 4 = y + 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 4 \\ \text{e} \\ 3 \cdot 4 + 4 = y + 1 \Rightarrow 16 = y + 1 \Rightarrow y = 15. \end{cases}$$

Daí, $x = 4$ e $y = 15$.

Paralelogramos particulares

a) Retângulo

Definição: É o paralelogramo que possui um ângulo reto.
Nota: O retângulo tem os quatro ângulos retos.
De fato, seja $ABCD$ um retângulo, então um dos ângulos é reto.

Vamos escolher $\hat{A} = 90°$.

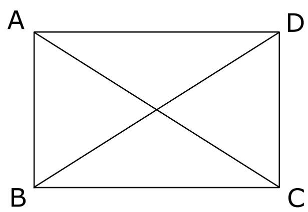
Como $ABCD$ é paralelogramo, temos que:

$$\hat{A} = \hat{C}, \ \ \hat{A} + \hat{B} = 180° \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90°, \ \ 90° + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 90°$$

e daí, $\hat{D} = 90°$, ou seja, os 4 ângulos são retos.

Teorema 3: Em todo retângulo as diagonais são congruentes entre si.
Prova: Seja $ABCD$ o retângulo da figura.



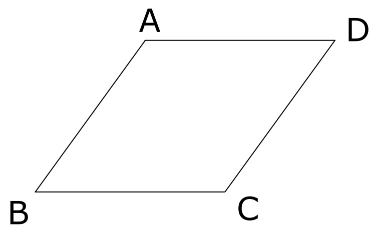
Tracemos as diagonais AC e BD. Vamos provar que $\overline{AC} = \overline{BD}$.
De fato,

$$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ DCB, \text{ já que: } \begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = 90° \\ AB \equiv CD \\ BC \text{ (lado comum)} \end{cases} \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \overline{AC} \equiv \overline{BD}.$$

b) Losango

Definição: É o paralelogramo que possui dois lados consecutivos congruentes.

Nota: O losango tem os quatro lados congruentes.
De fato, seja $ABCD$ um losango.



Temos que dois lados consecutivos têm a mesma medida, ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{BC} \quad (1).$$

Mas como $ABCD$ é um paralelogramo,

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad (2)$$

e

$$\overline{BC} = \overline{AD} \quad (3).$$

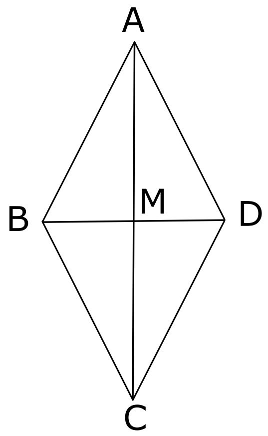
De (1), (2) e (3), vem:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}.$$

Logo, os quatro lados têm a mesma medida.

Teorema 4: Em um losango:
a) as diagonais são perpendiculares.
b) as diagonais são bissetrizes dos ângulos opostos.

Prova: Seja $ABCD$ o losango da figura:



Tracemos as diagonais AC e BD, que se cortam em M, ponto médio de ambas (teorema 1, item (iv)),
Δ ABD é isósceles, AM é mediana relativa à base BD, então AM é altura e bissetriz em relação a esta base. Portanto, AC é perpendicular à BD. O que prova o item a) e AC é bissetriz do ângulo $\hat{A}$.
De modo análogo, sejam os triângulos isósceles CBD, ABC e ADC, então AC é bissetriz do ângulo $\hat{C}$, BD bissetriz dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

c) Quadrado

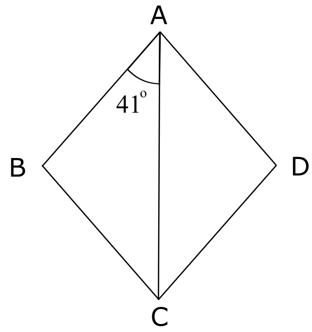
Definição: É o paralelogramo que possui dois lados consecutivos congruentes e um ângulo reto.

Nota: Pela definição dada, temos que todo quadrado é um losango (possui dois lados congruentes) e todo quadrado é um retângulo (possui um ângulo reto).
Daí, o quadrado é um quadrilátero convexo regular, sendo simultaneamente retângulo e losango, portanto gozando de todas as propriedades relativas a eles.

Exercícios Resolvidos

4. Calcule os ângulos de um losango, sabendo que uma diagonal forma com um lado um ângulo de 41°.

Solução: Seja o losango $ABCD$ da figura



Temos pelas propriedades de losango que:

$$\hat{A} = \hat{C} = 2 \cdot 41^\circ = 82^\circ$$

pois a diagonal AC é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.
Por outro lado,

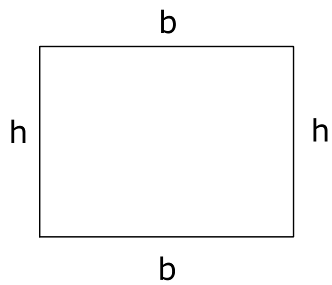
$$\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ.$$

Daí, os ângulos do losango são:

$$82^\circ, 98^\circ, 82^\circ \text{ e } 98^\circ.$$

5. Calcular os lados de um retângulo cujo perímetro mede 40 cm, sabendo que a base excede a altura de 4 cm.

Solução: Seja o retângulo cujo perímetro mede 40 cm e a base excede a altura de 4 cm.



Seja a base b e a altura h. Temos que:

$$\begin{cases} 2b + 2h = 40 \\ b = h + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + h = 20 & (1) \\ b = h + 4 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$h + 4 + h = 20 \Rightarrow 2h = 16 \Rightarrow h = 8.$$

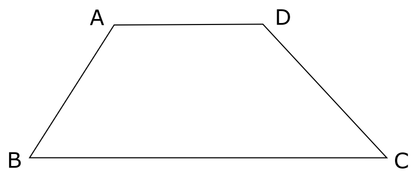
De (2) vem que

$$b = 8 + 4 = 12.$$

Daí, os lados do retângulo são 8 cm e 12 cm.

Trapézio

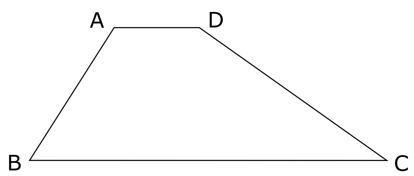
Definição: Um quadrilátero convexo é chamado trapézio se possui dois lados paralelos.



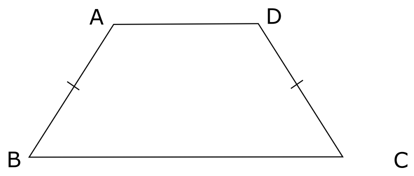
A figura mostra um trapézio $ABCD$ de bases AD e BC.

Classificação: Podemos classificar os trapézios em três tipos:

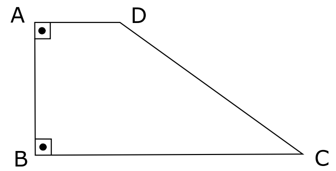
1º tipo: Escaleno - os lados não paralelos não são congruentes.
A figura mostra um trapézio $ABCD$ escaleno.



$2^{\underline{o}}$ tipo: Isósceles - os lados não paralelos são congruentes.
A figura mostra um trapézio isósceles.

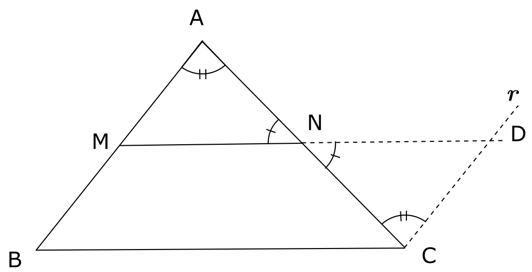


$3^{\underline{o}}$ tipo: Retângulo - um lado é perpendicular às bases.
A figura mostra um trapézio retângulo $ABCD$, onde AB é perpendicular às bases AD e BC.



Teorema 5: Em um triângulo o segmento que une os pontos médios de dois lados é tal que:
a) ele é paralelo ao terceiro lado.
b) sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Prova: Considere M e N pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, de um triângulo ABC.



Vamos provar que

$$MN \parallel BC \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

a) Pelo ponto C tracemos uma reta r paralela a AB e prolonguemos MN até encontrar a reta r em D, conforme figura.
Temos:

$$\left\{\begin{array}{l} C\hat{N}D = A\hat{N}M \text{ (opostos pelo vértice)} \\ \overline{CN} = \overline{AN} \text{ (hipótese)} \\ N\hat{C}D = M\hat{A}N \text{ (alternos internos)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta CDN \equiv \Delta AMN$$

$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{AM}$.

Daí, o quadrilátero $BMDC$ possuindo dois lados opostos $\overline{CD}$ e $\overline{BM}$ congruentes e paralelos é um paralelogramo (teorema 2 desta Aula).
Portanto,

$$MN \parallel BC$$

b) Como $BMDC$ é um paralelogramo, temos que : $\overline{MD} = \overline{BC}$.
Mas

$$\overline{MN} + \overline{ND} = \overline{MD} \Rightarrow \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{BC} \quad (1).$$

Da congruência dos triângulos CDN e AMN, temos que

$$\overline{ND} = \overline{MN} \quad (2).$$

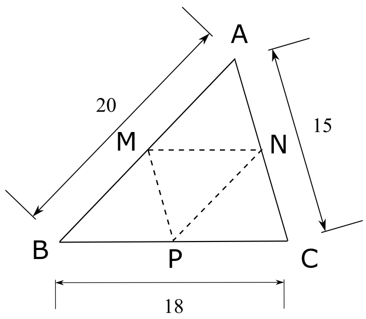
Substituindo (2) em (1), vem:

$$\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Definição: O segmento $\overline{MN}$ do teorema 5 é denominado uma base média do triângulo ABC.

Exercícios Resolvidos

6. No triângulo ABC da figura, M, N e P são os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Se $\overline{AB} = 20, \overline{BC} = 18$ e $\overline{AC} = 15$, calcule o perímetro do triângulo MNP.



Solução: Temos pelo teorema 5 que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\overline{NP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

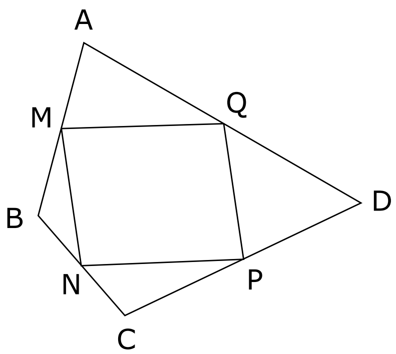
$$\overline{PM} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Daí, o perímetro do triângulo *MNP* é:

$$\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = 9 + 10 + 7,5 = 26,5.$$

7. Mostre que os pontos médios de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Solução: Seja *ABCD* um quadrilátero, *M*, *N*, *P* e *Q* os respectivos pontos médios de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$.



Temos pelo teorema 5:

$$\Delta ABC \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$$\Delta DAC \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ e $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

Logo pelo teorema 2, $MNPQ$ é paralelogramo.

Teorema 6: Em um trapézio o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos é tal que:
a) ele é paralelo às bases.
b) sua medida é igual a semi-soma das medidas das bases.

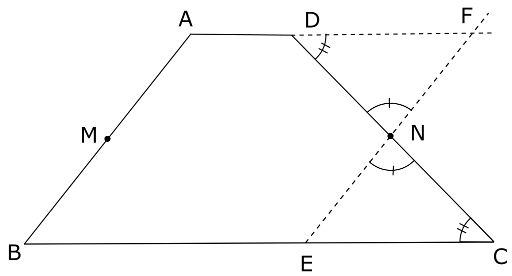
Prova: Sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos AB e CD, respectivamente, de um trapézio $ABCD$. Vamos provar que:

$a)$ $MN \parallel AD \parallel BC$

$$b) \ \overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$$

a) Tracemos pelo ponto N uma reta paralela ao lado AB.

Sejam E e F os pontos em que essa reta paralela encontra, respectivamente, a base BC e o prolongamento da base AD. Temos:



$$\begin{cases} C\hat{N}E = D\hat{N}F \text{ (opostos pelo vértice)} \\ \overline{CN} = \overline{DN} \text{ (hipótese)} \\ E\hat{C}N = F\hat{D}N \text{ (alternos internos)} \end{cases} \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta CEN \equiv \Delta DFN$$

$\Rightarrow \overline{EN} = \overline{FN}$.

Como $\overline{AB} = \overline{EF}$ (lados opostos do paralelogramo $BAFE$) $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{EN}$, já que

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} \text{ e } \overline{EN} = \frac{\overline{EF}}{2}.$$

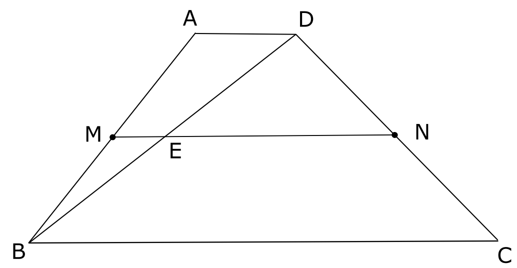
Daí, $BENM$ é um paralelogramo, já que

$$BM \equiv EN \text{ e } BM \parallel EN.$$

Logo,

$$MN \parallel AD \parallel BC.$$

b) Temos a figura:



Trace a diagonal BD e denomine a interseção de MN com BD de E.

No Δ ABD, $\overline{ME}$ base média, então $\overline{ME} = \dfrac{\overline{AD}}{2}$ (teorema 5).

No Δ BCD, $\overline{EN}$ base média, então $\overline{NE} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ (teorema 5).

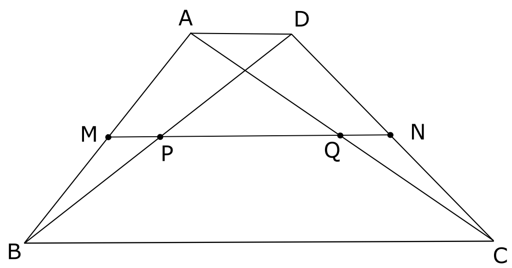
Daí,

$$\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EN} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}.$$

Definição: O segmento $\overline{MN}$ do teorema 6 é denominado base média do trapézio $ABCD$.

Teorema 7: Em um trapézio, o segmento de reta que une os pontos médios das diagonais é tal que:
a) ele é paralelo as bases.
b) sua medida é igual a semi-diferença das medidas das bases.

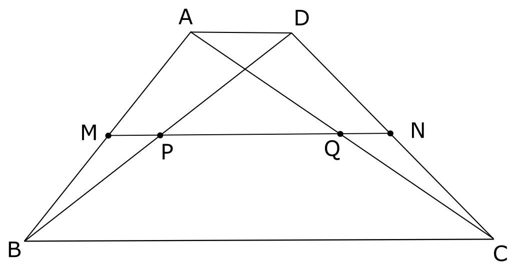
Prova:
a) Seja o trapézio $ABCD$, vamos mostrar primeiro que os pontos médios M e N dos lados não paralelos e os pontos médios P e Q das suas diagonais estão situados sobre uma mesma reta paralela às bases.



De fato, no Δ BCA, MQ liga os pontos médios dos lados e pelo teorema 5, $MQ \parallel BC$.
Analogamente no triângulo BCD, $PN \parallel BC$ e no triângulo CAD, $QN \parallel BC$.
Então os quatro pontos M, P, Q e N estão colocados sobre uma mesma reta paralela às bases.
Logo,

$$PQ \parallel AD \parallel BC$$

b) Seja o trapézio $ABCD$, e considere os pontos médios das diagonais:



Do item a) temos que M, P, Q e N estão em uma mesma reta, e esta é paralela as bases. Então,

$$\Delta\ BDC,\ \overline{PN} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ (teorema 5)}$$

$\Delta\ ADC$, $\overline{QN} = \dfrac{\overline{AD}}{2}$ (teorema 5).

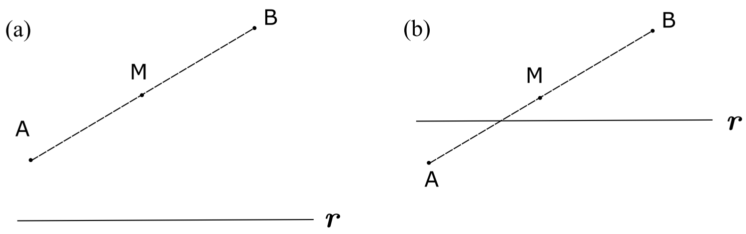
Daí,

$$\overline{PQ} = \overline{PN} - \overline{QN} = \frac{\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2}$$

Definição: O segmento $\overline{PQ}$ do teorema 7 é denominado *mediana de Euler*.

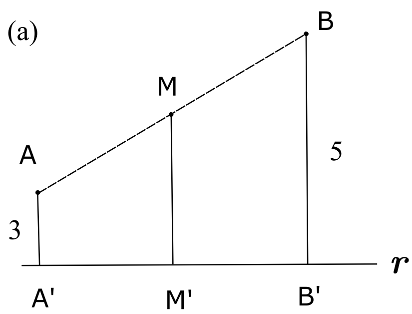
Exercícios Resolvidos

8. Se os pontos A e B distam, respectivamente, 3 cm e 5 cm da reta r, calcule a distância do ponto M, médio de AB a essa reta, em cada caso.



Solução:

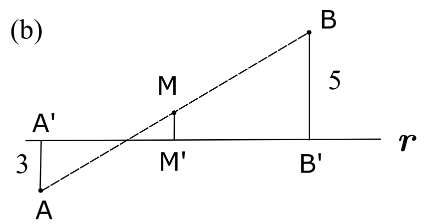
a) Vamos achar as projeções *A'*, *M'* e *B'* de *A*, *M* e *B* sobre a reta *r*.



Temos então o trapézio *AA'B'B* e *MM'* base média, logo,

$$MM' = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ cm}.$$

b)

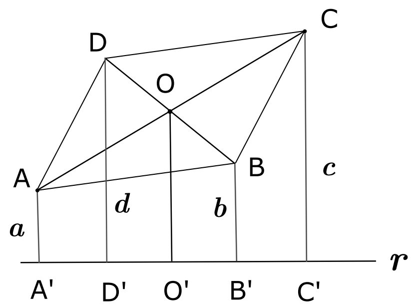


Temos que *A'B'* e *AB* são as diagonais do trapézio. Neste caso, *MM'* é a mediana de Euler.

$$MM' = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ cm}$$

9. Sendo *ABCD* um paralelogramo, e a, b, c e d, respectivamente, as distâncias dos vértices *A, B, C* e *D* à reta r exterior. Mostre que $a + c = b + d$.

Solução: Seja *ABCD* um paralelogramo, e a, b, c e d as distâncias dos vértices *A, B, C* e *D* à reta r exterior.
A', B', C' e *D'* as projeções de *A, B, C* e *D*.



Seja O o ponto de encontro das diagonais e *O'* a sua projeção.

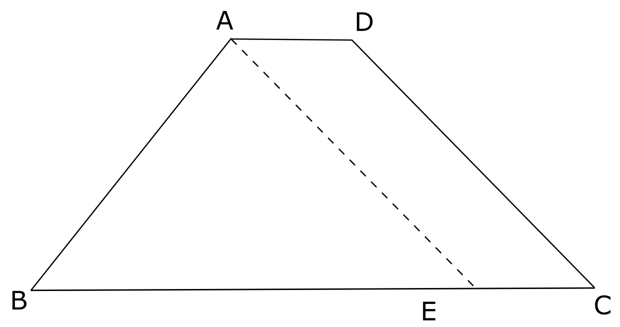
Temos no trapézio *AA'C'C* que *OO'* é base média, então $OO' = \dfrac{a+c}{2}$ (1)

Temos no trapézio $BB'D'D$ que OO' é base média, então $OO' = \dfrac{b+d}{2}$ (2).

De (1) e (2) vem:

$$\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Rightarrow a+c = b+d.$$

10. Prove que em um trapézio isósceles os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.



Solução: Seja um trapézio isósceles, conforme figura.

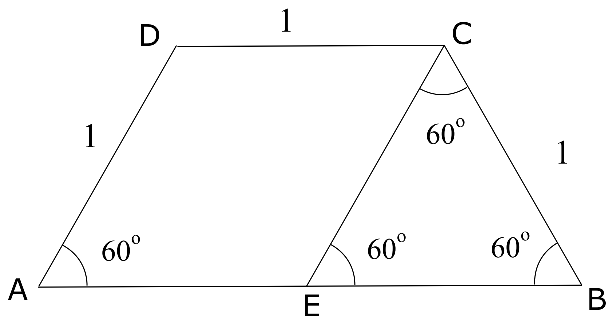
Tracemos $AE \parallel CD$. O quadrilátero $AECD$ é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos $\Rightarrow AE \equiv CD$.
Mas $AB \equiv CD$ (Definição de trapézio isósceles) $\Rightarrow AB \equiv AE$.
Portanto, o triângulo ABE é isósceles e $A\hat{E}B \equiv \hat{C}$ (ângulos correspondentes).
Logo,

$$\hat{B} \equiv \hat{C}.$$

Temos que $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são suplementares de $\hat{B}$ e $\hat{C}$, então $\hat{A} \equiv \hat{D}$.

11. O trapézio da figura é isósceles, o ângulo $\hat{A} = 60°$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = 1$ metro. Calcule a base média e a mediana de Euler do trapézio.

Solução: Seja o trapézio $ABCD$, com $\hat{A} = 60°$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = 1$



Temos pelo exercício 10 que $\hat{B} = 60°$
Seja $CE \parallel AD$, então $ADCE$ é paralelogramo, e BCE é triângulo equilátero. Então $\overline{AE} = 1$ e $\overline{BE} = 1$.
Daí, a base média

$$MN = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

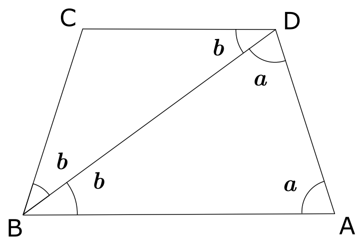
e a mediana de Euler

$$PQ = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

12. Na figura, sabe-se que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$ e $\overline{BD} = \overline{BA}$. Calcule o ângulo $\hat{A}$ do trapézio $ABCD$.

Solução: Seja o trapézio $ABCD$, tal que

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} \quad \text{e} \quad \overline{BD} = \overline{BA}$$



$\Delta\ BCD$ é isósceles $\Rightarrow D\hat{B}C = C\hat{D}B = b$
$\Delta\ ABD$ é isósceles $\Rightarrow B\hat{D}A = B\hat{A}D = a$.

Como $CD \parallel AB$ (Definição de trapézio), então $D\hat{B}A = b$.
Temos que $\overline{BC} = \overline{AD}$ (Trapézio isósceles), então $2b = a$ (Exercício 10).

No $\Delta ABD, a + a + b = 180° \Rightarrow 2b + 2b + b = 180° \Rightarrow 5b = 180° \Rightarrow b = 36°$.

Como $a = 2b \Rightarrow a = 72°$.

Daí, $\hat{A} = 72°$.

Exercícios Propostos

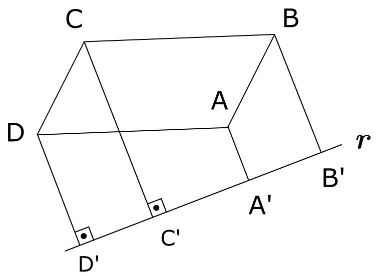
1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
   a) Todo trapézio é paralelogramo. (   )
   b) Todo paralelogramo é retângulo. (   )
   c) Todo losango é quadrado. (   )
   d) Existe losango que é retângulo. (   )

2. Em um paralelogramo, o perímetro mede 45 cm e a diferença das medidas de dois lados é 15 cm. Calcule a medida dos lados.

3. As diagonais de um trapézio retângulo medem respectivamente 19 cm e 24 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados do trapézio.

4. Calcule as diagonais do quadrilátero determinado pelas bissetrizes internas de um paralelogramo cujos lados medem 9 cm e 6 cm.

5. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e r uma reta exterior a ele. Calcule a distância de D a r se A, B e C distam 2 cm, 3 cm e 5 cm, respectivamente de r.



6. $ABCD$ é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. A bissetriz interna em D intercepta o lado $\overline{BC}$ em M, e a bissetriz de $B\hat{M}D$ contém A. Sabendo-se que $M\hat{A}B = 24°$, calcule os ângulos do trapézio $ABCD$.

7. A base média de um trapézio mede 60 cm, e a base menor é igual a $\frac{3}{7}$ da base maior. Calcule as medidas das bases.

8. Mostre que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

9. No triângulo ABC de lados $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 14$ e $\overline{AC} = 11$, os pontos D, E e F são pontos médios de $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo DEF.

10. Mostre que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

11. $ABCD$ é um losango no qual o ângulo $\hat{B}$ mede 108° e $CAPQ$ um outro losango cujo vértice P está no prolongamento de AB (no sentido de A para B). Determine o menor ângulo formado por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$.

12. Num paralelogramo $ABCD$, a bissetriz interna de D intercepta o lado BC em P e a bissetriz de $B\hat{P}D$ contem A. Sabendo-se que a medida do ângulo $P\hat{A}B$ vale 57°, determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

Gabarito

1. (a) F, (b) F, (c) F, (d) V.
2. $\frac{15}{4}$ cm e $\frac{75}{4}$ cm.
3. 43 cm.
4. 3 cm.
5. 4 cm.
6. $\hat{C} = \hat{D} = 96°$; $\hat{A} = \hat{B} = 84°$;
7. 84 cm e 36 cm.
8. Demonstração.
9. 17.
10. Demonstração.
11. 54°.
12. m$(\hat{A}) = 136°$.

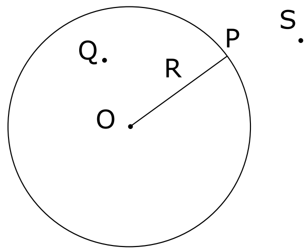
Aula 6 – Pontos Notáveis de um Triângulo

Definição: *Lugar Geométrico* é um conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade.
Uma linha ou figura é um lugar geométrico se:
a) todos os seus pontos têm a propriedade;
b) só os seus pontos têm a propriedade.

Exemplos:

Circunferência

1) Na figura, é a linha que representa uma circunferência de centro O e raio R.



Note que um ponto P dessa linha dista R do ponto O. A propriedade característica de cada ponto dessa linha em relação ao ponto O é distar R do ponto O. Não existe nenhum ponto não pertencente à circunferência que diste R do ponto O porque, se Q for interior à circunferência, então $\overline{OQ} < R$ e, se S for exterior à circunferência, então $\overline{OS} >$ R.
Assim podemos afirmar que só os pontos dessa circunferência distam R de O. Daí, o lugar geométrico dos pontos que distam R do ponto O é a circunferência de centro O e raio R.

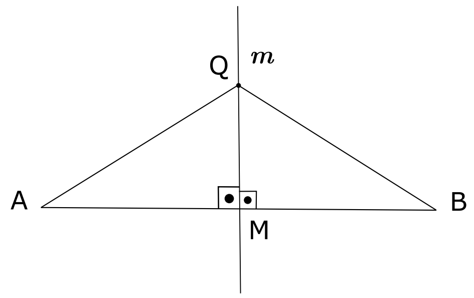
Mediatriz como lugar geométrico

2) Já estudamos que mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

Teorema 1: A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam dos extremos desse segmento.

Prova:
1ª parte: Vamos mostrar que todo ponto da mediatriz equidista dos extremos do segmento.

Considere m a reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo seu ponto médio M, e Q um ponto qualquer dessa mediatriz m. Vamos provar que $\overline{QA} = \overline{QB}$

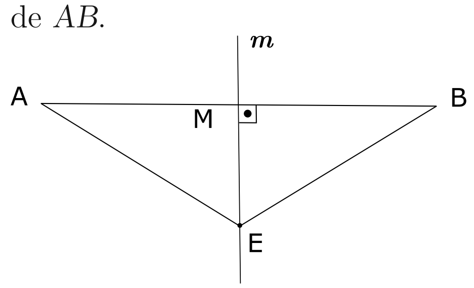


Sejam os triângulos AMQ e BMQ, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{MA} = \overline{MB} \text{ (construção)} \\ A\hat{M}Q = B\hat{M}Q \text{ (ângulo reto)} \\ MQ = MQ \text{ (lado comum)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta AMQ \equiv \Delta BMQ \Rightarrow$$

Daí, $\overline{QA} = \overline{QB}$.
Logo, Q é equidistante dos extremos A e B.

$2^{\underline{a}}$ parte: Só os pontos da mediatriz equidistam dos extremos desse segmento. Seja E um ponto qualquer do plano, tal que $\overline{EA} = \overline{EB}$, e provemos que E pertence à mediatriz de AB.



De fato, ligando E com o ponto médio M de AB e seja os triângulos AME e BME. Temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{EA} = \overline{EB} \text{ (Hipótese)} \\ \overline{AM} = \overline{BM} \text{ (Construção)} \\ EM = EM \text{ (lado comum)} \end{array}\right. \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta AME \equiv \Delta BME$$

Logo, os ângulos $A\hat{M}E$ e $B\hat{M}E$ são retos, pois são congruentes e adjacentes suplementares. Assim, a reta $\overleftrightarrow{EM}$ é perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto médio M do segmento AB e daí, pela unicidade de perpendicular, $\overleftrightarrow{EM} = m$.
Logo, E pertence à mediatriz m de AB.

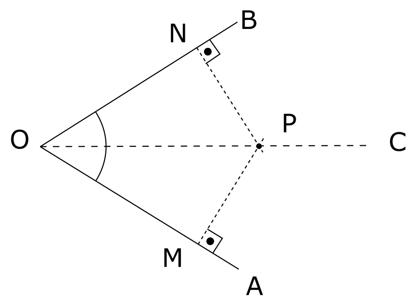
Bissetriz como lugar geométrico

Já estudamos que bissetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes.

Teorema 2: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam dos lados desse ângulo.
Prova:
1ª parte: Todo ponto da bissetriz equidista dos lados desse ângulo.
Seja P um ponto qualquer da bissetriz $\overleftrightarrow{OC}$ de um ângulo $A\hat{O}B$, $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ são as distâncias de P aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, respectivamente.
Vamos provar que:

$$\overline{PM} = \overline{PN}$$

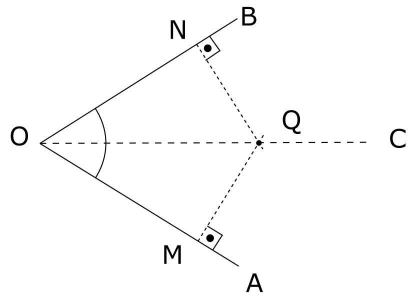
Seja os triângulos MOP e NOP, temos:



$$\left\{\begin{array}{l} OP \equiv OP \text{ (lado comum)} \\ M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P \text{ (definição de bissetriz)} \\ O\hat{M}P \equiv O\hat{N}P \text{ (ângulo reto)} \end{array}\right. \underset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \Delta MOP \equiv \Delta NOP$$

$\Rightarrow \overline{PM} = \overline{PN}$.
Logo, P é equidistante dos lados do ângulo $A\hat{O}B$.

2ª parte: Só os pontos da bissetriz equidistam dos lados desse ângulo.
Seja Q um ponto qualquer do plano tal que:
$\overline{QM} = \overline{QN}$ (distâncias de Q aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de um ângulo $A\hat{O}B$), e provemos que o ponto Q pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$.



De fato, sejam os triângulos retângulos MOQ e NOQ. Temos:

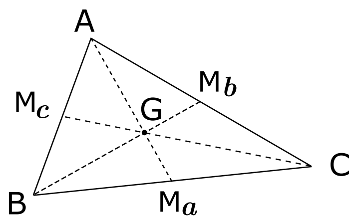
$$\begin{cases} \overline{QM} = \overline{QN} \text{ (hipótese)} \\ \overline{OQ} = \overline{OQ} \text{ (lado comum)} \end{cases} \underset{\text{Caso Especial}}{\Longrightarrow} \Delta MOQ \equiv \Delta NOQ$$

Daí, $M\hat{O}Q \equiv N\hat{O}Q$ e são adjacentes, e OQ é bissetriz.
Logo, Q pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$.

Vamos, agora, estudar os pontos notáveis de um triângulo.

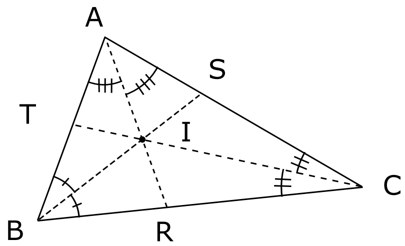
1. Baricentro

Definição: Baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das medianas desse triângulo.
No triângulo ABC da figura, AM_a, BM_b e CM_c são as medianas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente. O ponto G (encontro das medianas) é o baricentro do triângulo ABC.



2. Incentro

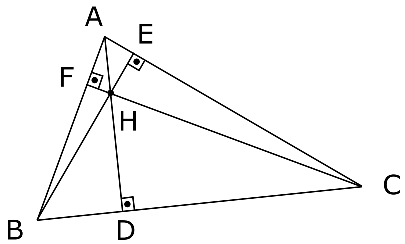
Definição: Incentro de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo.



No triângulo ABC da figura, AR, BS e CT são as bissetrizes internas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente.
O ponto I é o incentro do triângulo ABC, este ponto é o centro do círculo inscrito ao triângulo ABC.

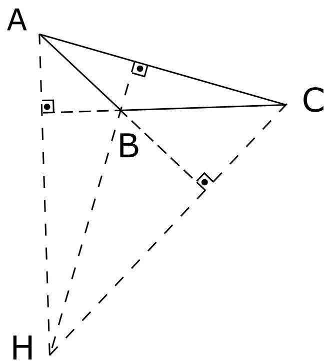
3. Ortocentro

Definição: Ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das retas suportes das alturas desse triângulo.



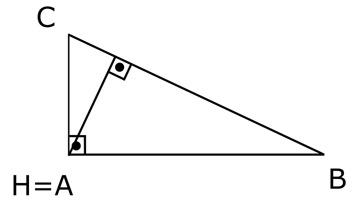
No triângulo ABC da figura, $\overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{BH}$, e $\overleftrightarrow{CH}$ são as retas suportes das alturas $\overline{AD}, \overline{BE}$, $\overline{CF}$, respectivamente, relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente.
O ponto H é o ortocentro do triângulo ABC.

Observações:
1) Em um triângulo obtusângulo, o ortocentro é um ponto exterior a esse triângulo.



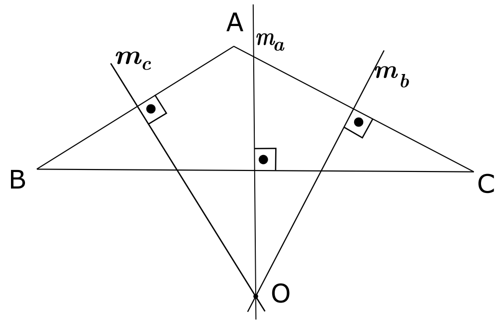
Na figura, o triângulo ABC é obtusângulo e o ortocentro H é exterior ao triângulo.

2) Em um triângulo retângulo, o ortocentro é o vértice do ângulo reto.
Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A e o ortocentro H coincide com A.



4. Circuncentro

Definição: Circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo.
No triângulo ABC da figura m_a, m_b e m_c são as mediatrizes dos lados BC, AC e AB, respectivamente.



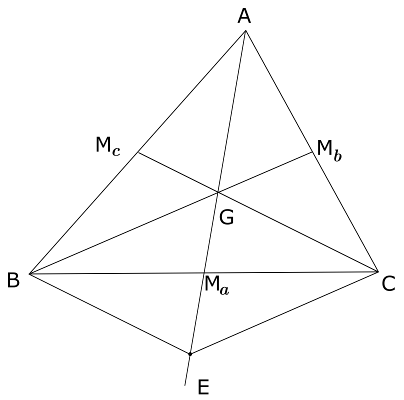
O ponto O é o circuncentro do triângulo ABC, este ponto é o centro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Exercícios Resolvidos

1. Mostre que as três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, o qual divide cada mediana em duas partes, tais que a que contém o vértice é o dobro da outra.

Solução: Seja o triângulo ABC e tracemos as medianas BM_b e CM_c, que se cortam em G, conforme figura.

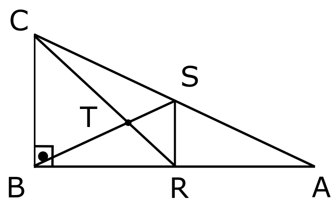
Tracemos a semi-reta $\overline{AG}$ que encontra BC e M_a.



Vamos provar que:

1) AM_a é a terceira mediana, isto é, M_a é o ponto médio de BC.
2) $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_a}$ ou $\overline{AG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$.
De fato, seja E em $\overleftrightarrow{AG}$, tal que $\overline{GE} = \overline{AG}$ e tracemos BE e CE.
No Δ ABE, $GM_c \parallel BE$, pois G e M_c são pontos médios dos lados AE e AB, respectivamente (base média).
De modo análogo, $GM_b \parallel CE$ no Δ ACE.
Daí, $BECG$ é um paralelogramo (Definição) e suas diagonais BC e GE se encontram em seus pontos médios.
Logo,
1) M_a é o ponto médio de BC e AM_a é a terceira mediana.
2) $\overline{AG} = \overline{GE} = 2 \cdot \overline{GM_a}$ ou $\overline{AG} = \overline{GE} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$
De modo similar, se prova que $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_b}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}$.

2. Na figura, o ponto R é ponto médio de AB, e o segmento RS é paralelo ao lado BC. Sendo $\overline{AC} = 28$, calcule a medida do segmento ST.



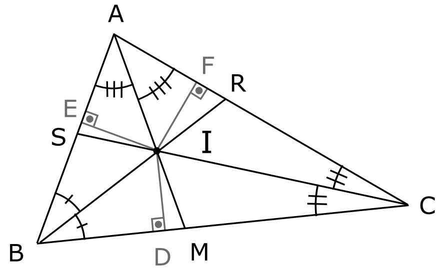
Solução: Sendo R o ponto médio de AB e $RS \parallel BC$, então S é o ponto médio de AC.
Daí, BS e CR são medianas e T é o baricentro do Δ ABC.
Daí,

$$\overline{BT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BS} \underset{\text{Ex. 1}}{\Longrightarrow} \overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BS}, \text{ mas } \overline{BS} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

Logo, $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot 14 = \frac{14}{3} \Rightarrow \overline{TS} = \frac{14}{3}$.

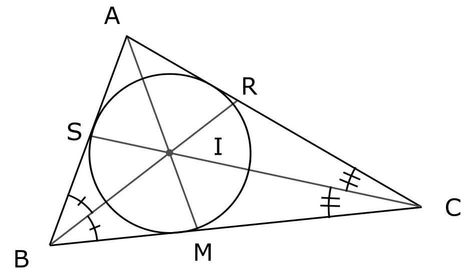
3. Mostre que as três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, que é equidistante dos lados.

Solução: Seja o $\Delta\ ABC$ e AM e BR as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ na figura.



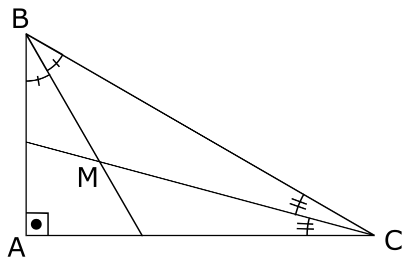
As semi-retas $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BR}$ formam com o lado AB, ângulos cuja soma $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$ é menor que 180° e, terão que encontrar-se.
Seja I o ponto de interseção. I pertencendo à bissetriz AM, temos que $\overline{IE} = \overline{IF}$ (Teorema 2).
I pertencendo à bissetriz BR, temos que $\overline{IE} = \overline{ID}$.
Logo, $\overline{IF} = \overline{ID}$, então I pertence a bissetriz CS.

Logo, as três bissetrizes internas do $\Delta\ ABC$ concorrem em um mesmo ponto, que é equidistante dos lados.
Note que o incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita neste triângulo.



4. Em um triângulo retângulo ABC, traçam-se as bissetrizes $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ dos ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, onde M é o incentro. Calcule a medida do ângulo $B\hat{M}C$.

Solução: Seja um triângulo retângulo ABC, tracemos as bissetrizes $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ dos ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, onde M é o incentro.



Temos que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \text{ no } \Delta ABC \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180° - 90° = 90°.$$

No Δ BMC temos:

$$\frac{\hat{B}}{2} + B\hat{M}C + \frac{\hat{C}}{2} = 180° \quad \Rightarrow B\hat{M}C = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

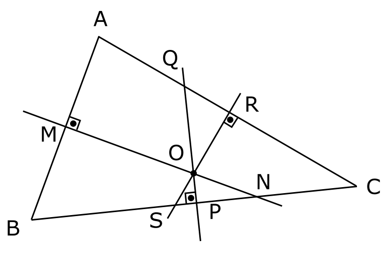
$$\Rightarrow B\hat{M}C = 180° - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow B\hat{M}C = 180° - \frac{90°}{2} = 180° - 45° = 135°.$$

Logo, a medida do ângulo $B\hat{M}C$ é 135°.

5. Mostre que as três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto equidistante dos vértices desse triângulo.

Solução: Seja o triângulo ABC, e MN e PQ as mediatrizes relativas aos lados AB e AC.



O pertence à mediatriz MN do lado $AB \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB}$ (1)

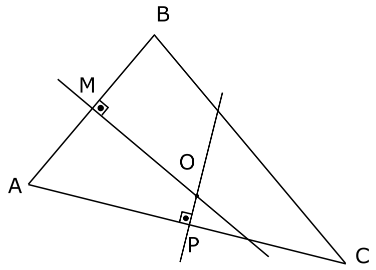
O pertence à mediatriz PQ do lado $BC \Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC}$ (2)

De (1) e (2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OC}$

Logo, O pertence à mediatriz RS, do lado AC.

6. Exprimir os ângulos formados pelas mediatrizes em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ do triângulo ABC.

Solução: Consideremos a figura, onde OM e OP são mediatrizes dos lados AB e BC.



Então, no quadrilátero $AMOP$ temos:

$$\hat{A} + M\hat{O}P = 180^\circ \Rightarrow M\hat{O}P = 180^\circ - \hat{A}$$

Chamando $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ os ângulos formados pelas mediatrizes, temos que

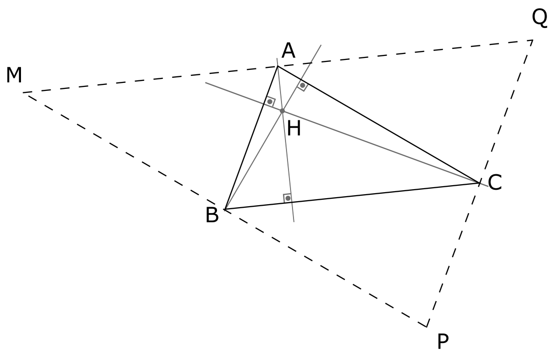
$$\widehat{\alpha} = 180^\circ - \hat{A}$$

De forma similar

$$\widehat{\beta} = 180^\circ - \hat{B} \text{ e } \widehat{\gamma} = 180^\circ - \hat{C}$$

7. Mostre que as retas suportes das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.

Solução: Seja o triângulo ABC, e tracemos para cada vértice a paralela ao lado oposto. Estas cortam-se, porque são paralelas às retas secantes e formam o triângulo MPQ.

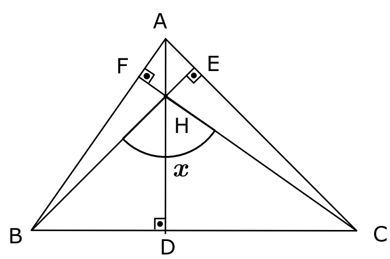


Os quadriláteros $AMBC$, $ABCQ$ e $CABP$ são paralelogramos, já que os lados opostos são paralelos.
Então:

$$\overline{AM} = \overline{BC} = \overline{AQ}$$
$$\overline{BM} = \overline{AC} = \overline{BP} \text{ (Propriedade de paralelogramo)}$$
$$\overline{CP} = \overline{AB} = \overline{CQ}$$

Então, A, B e C são os pontos médios dos lados do triângulo MPQ. Assim, as três alturas do triângulo dado ABC, confundem-se com as três mediatrizes do triângulo MPQ e concorrem em um mesmo ponto, H.

8. Na figura, calcule o valor de x, se $A\hat{B}C = 55°$ e $A\hat{C}B = 45°$.



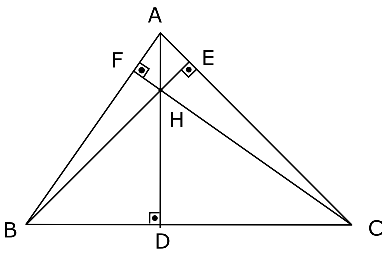
Solução: Seja a figura dada, temos que $A\hat{B}C = 55°$ e $A\hat{C}B = 45°$.

Então,

$$B\hat{A}C = 180° - A\hat{B}C - A\hat{C}B = 180° - 55° - 45° = 80°$$

No quadrilátero $AFHE$, temos:

$$m(F\hat{M}E) = 180° - 80° = 100°.$$



Como os ângulos $B\hat{H}C$ e $F\hat{H}E$ são opostos pelo vértice então:

$$x = m(B\hat{M}C) = m(F\hat{H}E) = 100^\circ$$

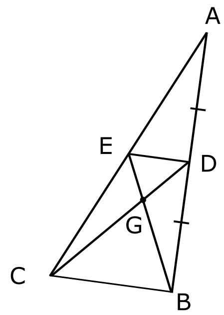
Observações:

1) Em um triângulo isósceles os quatro pontos notáveis estão sobre a mesma reta, já que a mediatriz, mediana, altura e bissetriz relativas à base coincidem.

2) No caso do triângulo equilátero, esses quatro pontos se reduzem a um só.

Exercícios Propostos

1. Na figura, o ponto D é médio do lado AB, e DE é paralelo ao lado BC. Sendo $\overline{AC} = 60$ cm, calcule a medida de GE.



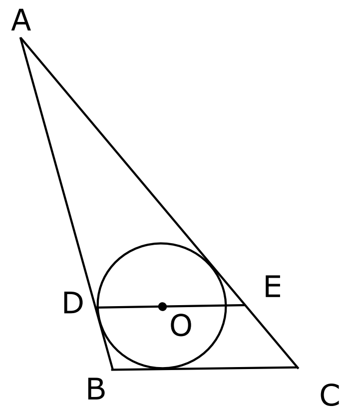
2. Considere um triângulo ABC tal que as medianas BD e CE, que se cortam em G, sejam congruentes. Mostre que:

   a) $\overline{BG} = \overline{CG}$

   b) $\Delta CGD = \Delta BGE$

   c) o triângulo ABC é isósceles.

3. Na figura, a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC. Sendo DOE paralelo ao lado BC, $\overline{AB} = 16, \overline{AC} = 20$, calcule o perímetro do triângulo ADE.



4. Em um triângulo ABC as três mediatrizes fazem entre si três ângulos iguais a $120°$. Mostre que este triângulo é equilátero.

5. Em um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede $60°$ e o ângulo $\hat{B}$ mede $80°$. Calcule as medidas dos seis ângulos formados pelas alturas com vértice no ortocentro H desse triângulo.

6. Considere um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede $40°$ e o ângulo $\hat{B}$ mede $60°$. Une-se o ponto médio M do lado BC aos pés D e E das alturas BD e CE. Determine as medidas dos ângulos internos do triângulo MDE.

7. As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC formam um ângulo de $116°$. Determinar a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

8. Mostre que em um triângulo acutângulo o ortocentro é incentro do seu triângulo órtico.
   Nota: Triângulo órtico é o triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo.

9. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo,

   a) Quais os que podem ser externos ao triângulo?

   b) Qual o que pode ser ponto médio de um lado?

   c) Qual o que pode ser vértice de um triângulo?

10. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm e um dos ângulos 20°.

    a) Qual a medida da mediana relativa à hipotenusa?

    b) Qual a medida do ângulo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto?

Gabarito

1. 10.
2. Demonstração.
3. 36.
4. Demonstração.
5. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.
6. $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$.
7. 52°
8. Demonstração.
9. a) ortocentro e circuncentro; b) circuncentro; c) ortocentro.
10. a) 10 cm; b) 25°.

Aula 7 – Complementos

Apresentamos esta aula em forma de *Exercícios Resolvidos*, mas são resultados importantes que foram omitidos na primeira aula que tratou de *Conceitos Básicos*.

Exercício 1: Em um plano, por um ponto, existe e é única a reta perpendicular a uma reta dada.

Solução:

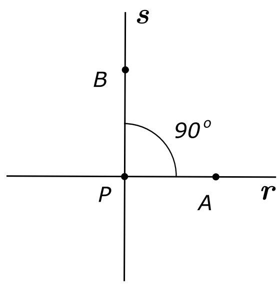
Seja o plano α, $r \in \alpha$ e $P \in \alpha$. Vamos considerar dois casos:

1º Caso: $P \in r$.

Existência:

Vamos exibir pelo menos uma reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

Seja $A \in r$ e $A \neq P$.



Constroem-se os ângulos $A\hat{P}B$, com B em um dos semiplanos de origem r, tal que $m(A\hat{P}B) = 90°$.

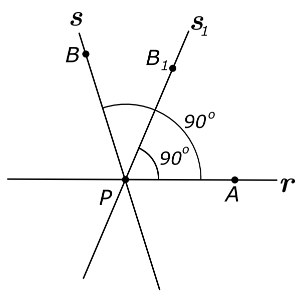
Seja $\overleftrightarrow{BP}$ sendo s. Então existe pelo menos uma reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

Unicidade:

Vamos supor que existe mais de uma reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P, ou seja, que existem as retas s e s_1, perpendiculares à reta r que passa por P. E vamos provar que $s = s_1$.

Considere as retas s e s_1 que contêm as semi-retas $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PB_1}$ em um dos semiplanos de origem r.

Pela definição de retas perpendiculares, os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}B_1$ são retos, conforme a figura.



Daí, por construção, os pontos B e B_1 estão na mesma semi-reta. Daí, s e s_1 têm mais de um ponto comum e não podem ser distintas. Portanto $s = s_1$.

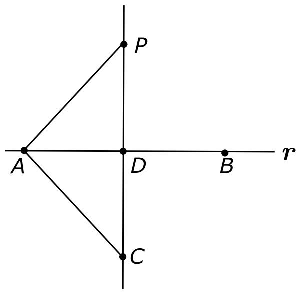
$2^{\underline{o}}$ Caso: P não pertence à reta r.

Existência:

Sejam A e B dois pontos distintos de r. Ligue P com A.

Se $m(P\hat{A}B) = 90°$, $\overleftrightarrow{PA}$ é perpendicular à reta r e a existência está provada.

Vamos supor que $P\hat{A}B$ seja agudo, conforme a figura:



Trace a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ formando com $\overleftrightarrow{AB}$ ângulo congruente a $P\hat{A}B$.

Por construção $\overline{AP} = \overline{AC}$ e ligue P com C. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ encontra a reta r em D, pois P e C estão em semiplanos opostos em relação à reta r.

Sejam os triângulos PAD e CAD, temos:

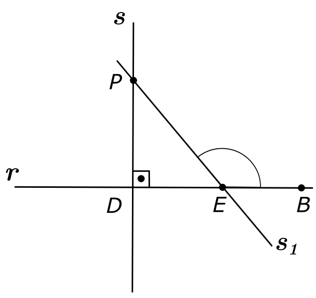
$$\left\{\begin{array}{l} AD \equiv AD \text{ (lado comum)} \\ P\hat{A}D = C\hat{A}D \text{ (construção)} \\ AP = AC \text{ (construção)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta PAD \equiv \Delta CAD$$

Logo, $A\hat{D}P \equiv A\hat{D}C$ e esses ângulos são adjacentes e suplementares, então $\overleftrightarrow{PC}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Daí existe por P pelo menos uma reta s perpendicular à r.

Unicidade:

Suponha $\overleftrightarrow{PD} = s$ perpendicular à reta r. Vamos provar que uma outra reta $\overleftrightarrow{PE} = s_1$ com $E \in r$ e distinto de D, não pode ser perpendicular à reta r.

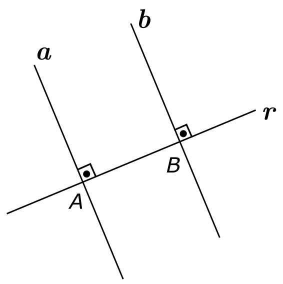


De fato, $P\hat{E}B$ é um ângulo externo ao triângulo PDE. Daí $m(P\hat{E}B) > m(P\hat{D}E) = 1$ reto.
Então $P\hat{E}B$ é obtuso, logo s_1 não pode ser perpendicular à reta r. Assim, a reta s, perpendicular a r, que passa por P é única.

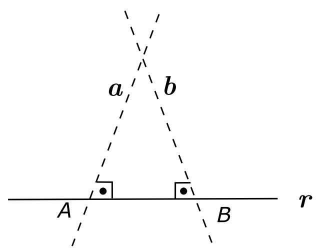
Exercício 2: Mostre que em um plano, duas retas distintas e perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

Solução:

Seja a reta r e dois pontos distintos A e B pertencentes à reta r. Por esses dois pontos tracemos as retas a e b perpendiculares à reta r.



As retas a e b não têm ponto em comum, pois, se tivesse, teríamos duas retas distintas perpendiculares à reta r passando por esse ponto comum, o que contraria a unicidade da perpendicular.
Logo, $a \parallel b$.



Observações:

1) *Figura fantasma* é uma figura que não tem sentido geométrico, usada para que possamos chegar a contradições em relação a propriedades aceitas como verdadeiras.

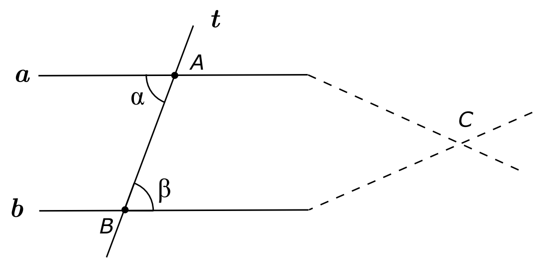
2) A propriedade que acabamos de provar justifica o fato de que não existe triângulo com dois ângulos retos.

Exercício 3: Mostre que duas retas distintas de um plano, que formam com uma transversal ângulos alternos internos congruentes, são retas paralelas.

Solução:

Considere as retas a e b distintas cortadas pela transversal t nos pontos A e B, e os ângulos alternos internos de medidas α e β com $\alpha = \beta$ e vamos provar que $a \parallel b$.

Vamos provar pelo método de redução ao absurdo, ou seja, vamos negar a tese, admitindo que as retas a e b se encontram num ponto C, conforme a figura fantasma.



Seja o ΔABC, o ângulo α é externo e β é interno.

Temos que $\alpha > \beta$ (o ângulo externo é maior que qualquer interno não adjacente).

Absurdo, já que $\alpha = \beta$ (hipótese). Então $a \parallel b$.

Observação:

De modo similar provaríamos o caso de α e β serem alternos externos, correspondentes ou colaterais.

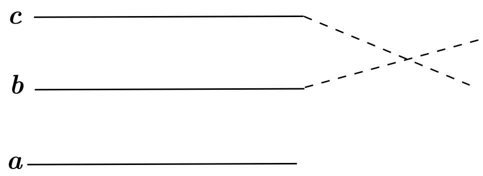
Exercício 4: Mostre que, em um plano, dadas duas retas paralelas, qualquer reta paralela a uma delas será paralela à outra.

Solução:

Sejam a e b as retas paralelas e c uma reta paralela à reta a.

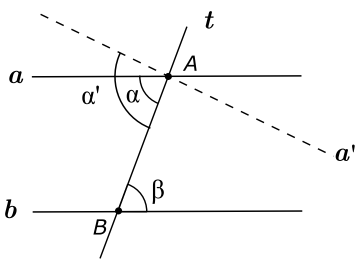
Vamos provar que $c \parallel b$.

Vamos usar o método de redução ao absurdo.



Se as retas b e c tivessem um ponto comum, teríamos por esse ponto duas retas distintas b e c paralelas à reta a, o que contraria o postulado das paralelas, ou postulado de Euclides.
Logo as retas b e c não têm ponto comum e são paralelas, ou seja, $c \parallel b$.

Exercício 5: Mostre que duas retas paralelas distintas, cortadas por uma transversal, formam ângulos alternos internos congruentes.
Solução:
Sejam as retas paralelas e distintas a e b cortadas por uma transversal t nos pontos A e B. Se α e β são as medidas dos ângulos alternos internos, vamos provar que $\alpha = \beta$.
Usando o método de redução ao absurdo, vem:
Vamos supor $\alpha \neq \beta$. Pelo ponto A, trace a reta a', tal que uma de suas semi-retas forma com t um ângulo $\alpha' = \beta$.



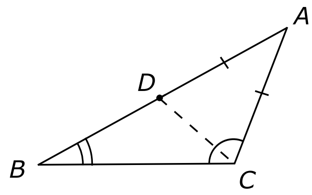
Pelo Exercício 3, como $\alpha' = \beta$ então $a' \parallel b$.
Mas, por hipótese, $a \parallel b$, daí pelo ponto A temos duas retas a e a' distintas paralelas à reta b, isto é absurdo, por causa do postulado das paralelas.
Logo $\alpha = \beta$.

Observação:
De modo similar, provaríamos que são congruentes os ângulos alternos externos e os correspondentes e que os colaterais são suplementares se tivermos duas retas paralelas distintas, cortadas por uma transversal.

Exercício 6: Mostre que, se um triângulo tem dois lados de medidas desiguais, ao lado da maior medida opõe-se o ângulo de maior medida.

Solução:

Seja um triângulo ABC tal que $\overline{AB} > \overline{AC}$ e vamos provar que $\hat{C} > \hat{B}$.
Seja sobre o lado AB um ponto D, tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$.



Ligando D com C vem:

$$\hat{C} > m(A\hat{C}D) \quad (1)$$

O triângulo ACD é isósceles por construção,

$$\overline{AD} = \overline{AC} \Rightarrow m(A\hat{D}C) = m(A\hat{C}D) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$\hat{C} > m(A\hat{D}C) \quad (3)$$

Temos que o ângulo $A\hat{D}C$ é externo em relação ao ΔBDC. Então

$$m(A\hat{D}C) > \hat{B} \quad (4)$$

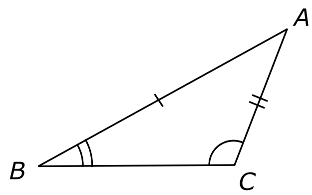
De (3) e (4) vem:

$$\hat{C} > \hat{B}$$

Exercício 7: Mostre que, se um triângulo tem dois ângulos de medidas desiguais, ao ângulo de maior medida opõe-se o lado de maior medida.

Solução:

Seja um ΔABC tal que $\hat{C} > \hat{B}$ e vamos provar que $\overline{AB} > \overline{AC}$.
Temos que $\overline{AB} < \overline{AC}$ ou $\overline{AB} = \overline{AC}$ ou $\overline{AB} > \overline{AC}$.



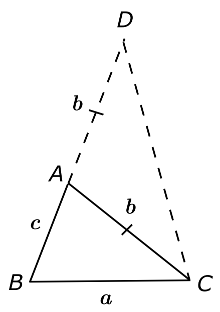
1ª Possibilidade: $\overline{AB} < \overline{AC}$
Aplicando o Exercício 6, temos que $\hat{C} < \hat{B}$; absurdo, já que $\hat{C} > \hat{B}$.

$2^{\underline{a}}$ Possibilidade: $\overline{AB} = \overline{AC}$
Sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$, o ΔABC é isósceles $\Rightarrow \hat{C} = \hat{B}$; absurdo, já que $\hat{C} > \hat{B}$.
Daí só nos resta a terceira alternativa: $\overline{AB} > \overline{AC}$

Exercício 8: Mostre que, em qualquer triângulo, a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos outros dois e é maior que a diferença dessas medidas em valor absoluto.

Solução:
Seja ABC um triângulo qualquer, tal que $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.
Vamos mostrar que :
1) $a < b + c$
2) $a > |b - c|$

$1^{\underline{a}}$ parte: $a < b + c$
Seja sobre a reta suporte do lado AB um ponto D, tal que $\overline{AD} = \overline{AC} = b$.



Ligue os pontos D e C, obtendo o triângulo isósceles CAD de base CD.
Temos:
$m(A\hat{C}D) < m(B\hat{C}D)$ (1)
$m(A\hat{C}D) = m(C\hat{D}A)$ (2)

De (1) e (2) vem:

$$m(C\hat{D}A) < m(B\hat{C}D)$$

Daí no ΔBCD temos que $\overline{BC} < \overline{BD}$, ou seja,

$$a < \overline{BD} \qquad (3) \text{ (Exercício 7)}$$

Como

$$\begin{cases} \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} \\ \overline{AD} = \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC}, \text{ ou seja, } \overline{BD} = c + b \qquad (4)$$

De (3) e (4), vem:

$$a < b + c$$

$2^{\underline{a}}$ parte: $a > |b - c|$
Se $b = c$, é evidente a desigualdade a ser provada.
Se $b > c \Rightarrow$ então pela $1^{\underline{a}}$ parte temos:

$$a + c > b \Rightarrow a > b - c \qquad (1)$$

Se $b < c \Rightarrow a + b > c \Rightarrow a > c - b \Rightarrow a > -(b - c) \qquad (2)$
De (1) e (2) vem que:

$$a > |b - c|$$

Observação:
Uma condição necessária e suficiente para que três números reais positivos a, b e c sejam as medidas dos lados de um triângulo é que um deles seja menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença desses outros dois em valor absoluto.
Por exemplo: $|b - c| < a < b + c$.

Exercício 9: Verificar se existe algum triângulo cujos lados medem:

a) 7 cm, 10 cm e 19 cm.

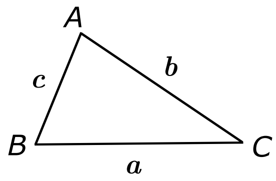
b) 6 cm, 9 cm e 14 cm.

Solução:

a) Usando o Exercício 8 vem: $|19-7| < 10 < 19+7$, que é uma desigualdade falsa.
Daí não existe triângulo com lados medindo 7 cm, 10 cm e 19 cm.

b) Usando o Exercício 8 vem: $|14 - 6| < 9 < 14 + 6$, que é uma desigualdade verdadeira.
Daí, existe triângulo com lados medindo 6 cm, 9 cm e 14 cm.

Exercício 10: Mostre que em qualquer triângulo a medida de cada lado é menor que a medida do semiperímetro desse triângulo.
Solução:
Considere a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC de perímetro $2p$.



Vamos provar que $a < p$.
De fato, temos pelo Exercício 8 que $a < b + c \quad (1)$
Somando a medida a aos dois membros da desigualdade (1) vem:

$$a + a < a + b + c \Rightarrow 2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{a + b + c}{2}$$

Ou seja,

$$a < \frac{2p}{2} \Rightarrow a < p$$

De forma similar

$$b < p \qquad \text{e} \qquad c < p$$

Exercícios Propostos

1. Mostre que em um triângulo qualquer a medida de cada altura é menor que a semi-soma das medidas dos lados adjacentes a ela.

2. Mostre que em qualquer triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é menor do que a metade da hipotenusa.

3. Se $x \in \mathbb{N}$ e os números $x - 1$, $2x + 1$ e 10 são medidas dos lados de um triângulo, determine o número de possibilidades de x.

4. Mostre que em qualquer triângulo isósceles ABC, as bissetrizes dos ângulos congruentes são congruentes. (Use congruência de triângulos).

5. Mostre que a soma das medidas das três medianas é menor que o perímetro desse triângulo.

Gabarito

1. Demonstração.

2. Demonstração.

3. 4.

4. Demonstração.

5. Demonstração.

Estudo de posições relativas de duas circunferências

Definições:

1) Uma circunferência é interna à outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.

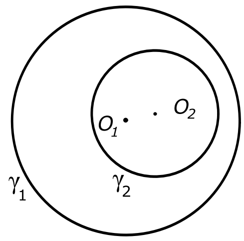
2) Uma circunferência é tangente interna à outra se tem um único ponto comum e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.

3) Duas circunferências são secantes se têm em comum somente dois pontos distintos.

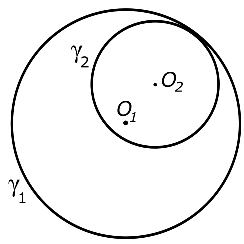
4) Duas circunferências são tangentes externas se têm único ponto comum e os demais pontos de uma são externos à outra.

5) Duas circunferências são externas se os pontos de uma delas são externos à outra.

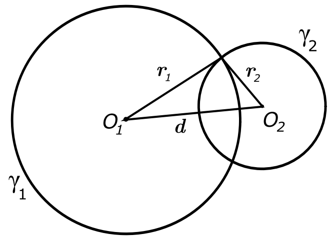
Se γ_1 é circunferência de centro O_1 e raio r_1.
Se γ_2 é circunferência de centro O_2 e raio r_2.
$d \rightarrow$ distância entre os centros O_1 e O_2.



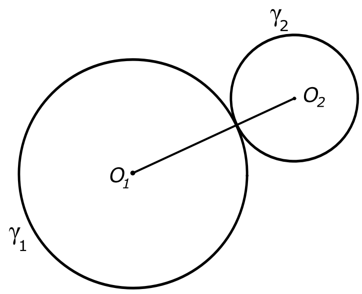
γ_2 é interna a γ_1, $d < r_1 - r_2$



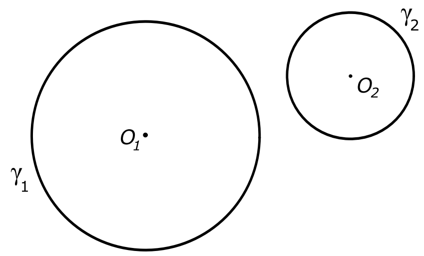
γ_2 é tangente interna a γ_1, $d = r_1 - r_2$



γ_2 e γ_1 são secantes, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$



γ_2 tangente externa a γ_1, $d = r_1 + r_2$

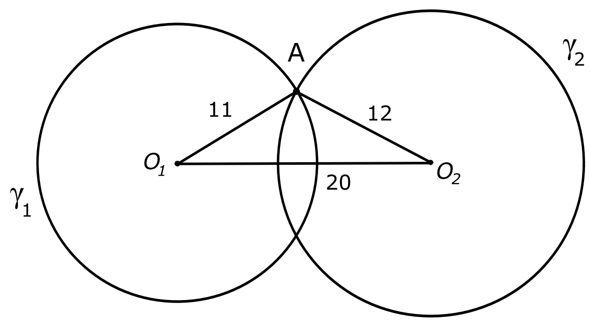


γ_2 é externa a $\gamma_1, d > r_1 + r_2$

Exercícios Resolvidos

1. Duas circunferências são secantes, sendo de 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 11 cm, determine o raio da maior que é múltiplo de 12.

Solução: Temos que : $d(O_1, O_2) = 20$ e $r_1 = 11$.



Então para existir o triângulo O_1AO_2 vem:

$$20 - 11 < r_2 < 20 + 11 \Rightarrow 9 < r_2 < 31$$

Como r_2 é múltiplo de 12, temos que $r_2 = 12$ ou $r_2 = 24$.

2. A distância entre os centros de duas circunferências exteriormente é de 33 cm. Determinar seus diâmetros sabendo que a razão entre seus raios é $\dfrac{4}{7}$.

Solução: Sejam duas circunferências tangentes externas de raios r_1 e r_2, então

$$\begin{cases} d = 33 = r_1 + r_2 & (1) \\ \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{4}{7} & (2) \end{cases}$$

De (2) vem:

$$7r_1 = 4r_2 \Rightarrow r_1 = \frac{4}{7} \cdot r_2 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) vem:

$$\frac{4 \cdot r_2}{7} + r_2 = 33 \Rightarrow \frac{11 \cdot r_2}{7} = 33 \Rightarrow r_2 = 21 \Rightarrow r_1 = \frac{4 \cdot 21}{7} = 12$$

Daí, os diâmetros são 24 cm e 42 cm.

Aula 8 – Segmentos Proporcionais

Nas aulas anteriores, aprendemos uma formação geométrica básica, através da Geometria Plana de Posição.

Aprendemos que:

1. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo são 180º.

2. Em um triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois.

3. Incentro de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas.

No entanto, apesar de sabermos o que é uma altura, bissetriz ou mediana, essa geometria de posição não nos dá condições para o cálculo do comprimento dessa altura, bissetriz ou mediana. A parte da geometria que estuda as relações métricas entre medidas de segmentos de uma figura é denominada Geometria Métrica que vamos estudar a partir deste momento.

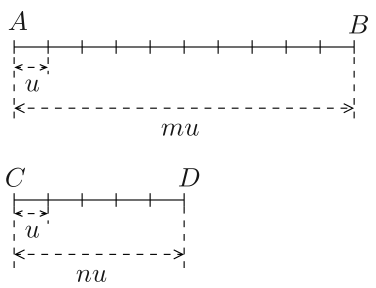
Razão de dois segmentos

A razão entre dois segmentos é igual à razão dos números que exprimem as medidas com a mesma unidade. Supor que AB e CD sejam comensuráveis, isto é, admitem uma medida comum u, que está m vezes em AB e n vezes em CD.

Temos:

$$\overline{AB} = mu$$

$$\overline{CD} = nu$$



A razão entre os segmentos AB e CD é igual a razão entre suas medidas, ou seja,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}\,.$$

Obs.: Se os segmentos AB e CD são incomensuráveis, ou seja, não admitem uma medida comum, podemos provar que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\,.$$

Segmentos proporcionais

Definição:

Dois segmentos são proporcionais a dois outros segmentos se à razão dos dois primeiros é igual à razão dos outros dois.

Exemplo

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}\,.$$

A igualdade dessas duas razões formam uma proporção.

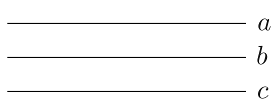
Feixe de retas paralelas

Definição:

1) *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares entre si.*

Exemplo

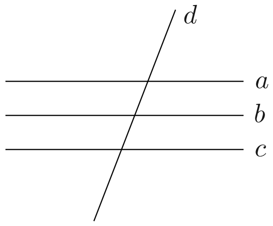
Na figura a seguir, as retas a, b e c constituem um feixe de retas paralelas.



2) *Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe de retas paralelas.*

Exemplo

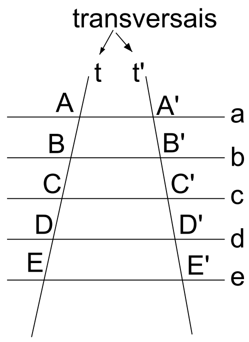
Na figura a seguir, a reta d é uma reta transversal às retas paralelas a, b e c.



3) *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe de retas paralelas* A *e* A', B *e* B', C *e* C', D *e* D', E *e* E' *são pontos correspondentes.*

Exemplo

Na figura a seguir, a, b, c, d e e é o feixe de retas parlelas.



4) *Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

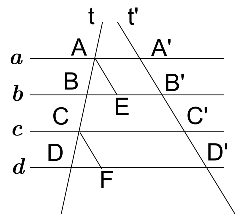
Exemplo

AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CD e $C'D'$ são segmentos correspondentes.

Teorema 1
Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma tem como correspondentes segmentos congruentes na outra.

Demonstração:

Seja um feixe de retas paralelas com duas transversais, temos que $a//b//c//d$ e $AB \equiv CD$ (hipótese). Tracemos pelos pontos A e C os segmentos AE e CF, tal que $AE//t'$ e $CF//t'$. Temos que $AE \equiv A'B'$ e $CF \equiv C'D'$ (1), já que são lados opostos dos paralelogramos $AEB'A'$ e $CFD'C'$.



Então,

$$\Delta ABE \equiv \Delta CDF$$

pois

$$\begin{cases} AB & \equiv & CD \\ A\widehat{B}E & \equiv & C\widehat{D}F \\ B\widehat{A}E & \equiv & D\widehat{C}F \end{cases}$$

(caso ALA) o que implica,

$$AE \equiv CF\,,$$

de (1)

$$A'B' \equiv C'D'\,.$$

■

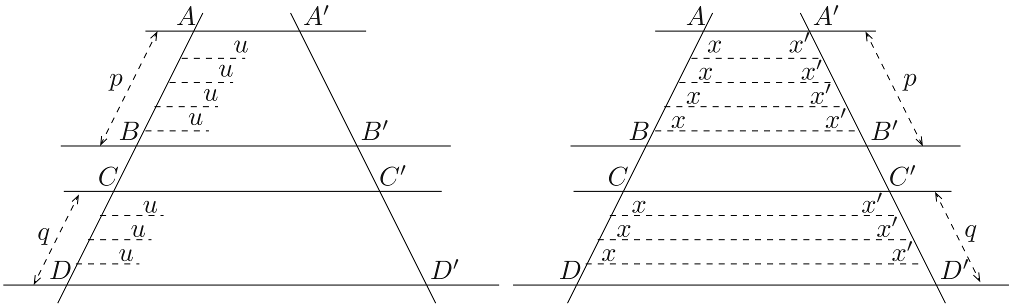
Teorema de Tales
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então à razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Demonstração:

Considere AB e CD dois segmentos de uma transversal e $A'B'$ e $C'D'$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal.

Vamos provar que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

$1^{\underline{o}}$ caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.



Existe um segmento u que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{pu}{qu} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \;\; (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando o Teorema 1 vem:

$$\begin{array}{l} A'B' = px' \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{p}{q} \\ C'D' = qx' \end{array}$$

De (1) e (2) vem que:

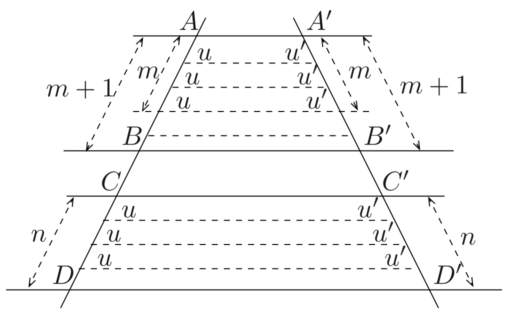
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

$2^{\underline{o}}$ caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Daí, não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomemos um segmento u submúltiplo de $\overline{CD}$, isto é, $\overline{CD} = nu$ (1).

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando necessariamente u em $\overline{AB}$, temos que para um certo número inteiro m de vezes acontece $mu < \overline{AB} < (m+1)u$ (2).



De (1) e (2)

$$\begin{array}{ccccc} mu & < & \overline{AB} & < & (m+1)u \\ nu & & = & & \overline{CD} \end{array} \;\Rightarrow\; \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e aplicando o Teorema 1 vem:

$$\begin{array}{rcl} \overline{C'D'} & = & nu' \\ mu' & < & \overline{A'B'} \quad < \quad (m+1)u' \end{array}$$

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} mu' & < & \overline{A'B'} & < & (m+1)u' \\ nu' & & < & & \overline{C'D'} \end{array} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Pelas relações (3) e (4) as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ estão compreendidos entre $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{m+1}{n+1}$, cuja diferença é $\dfrac{1}{n}$.

Em outras palavras, as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ têm valores aproximados a menos de $\dfrac{1}{n}$

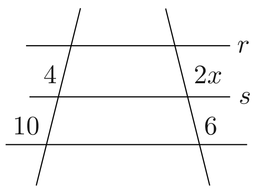
Logo temos, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

■

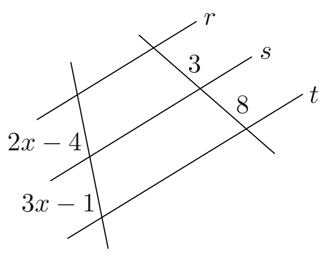
Exercícios Resolvidos

1. Nas figuras a seguir, as retas r, s e t são paralelas. Determine os valores de x e y.

a)



b)



Solução:

Usando o Teorema de Tales vem:

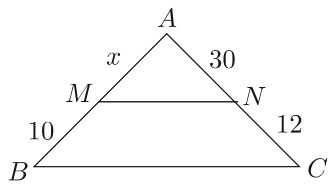
a)

$$\frac{4}{10} = \frac{2x}{6} \quad \Rightarrow \quad 20x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

b)

$$\frac{2x-4}{3x-1} = \frac{3}{8} \Rightarrow 16x - 32 = 9x - 3 \Rightarrow 16x - 9x = 32 - 3 \Rightarrow 7x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{7}\,.$$

2. Na figura, $\overline{MN}//\overline{BC}$. Calcule o valor de $\overline{AB}$.



Solução:

Usando o Teorema de Tales vem:

$$\frac{x}{10} = \frac{30}{12} \quad \Rightarrow \quad 12x = 30 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad x = 25\,.$$

Logo,

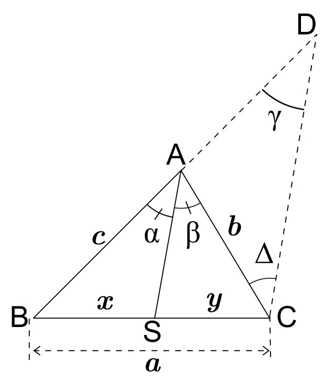
$$\overline{AB} = x + 10 = 25 + 10 = 35\,.$$

Bissetriz de um triângulo

Teorema da bissetriz interna (TBI)
Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c, $\overline{AS}$ uma bissetriz interna, $\overline{SB} = x$ e $\overline{SC} = y$. Vamos provar que $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.



De fato, tracemos pelo vértice C do ΔABC, a paralela $\overline{CD}$ à bissetriz interna AS, conforme a figura.

Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \text{ (hipótese)} \\ \beta &= \Delta \text{ (alternos internos)} \\ \alpha &= \gamma \text{ (correspondentes)} \\ \Rightarrow \gamma &= \Delta \end{aligned}$$

Daí, o ΔACD é isósceles, de base CD, logo $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Usando o teorema de Tales no ΔBCD vem:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}}.$$

Como $\overline{BS} = x$, $\overline{CS} = y$, $\overline{BA} = c$ e $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ vem $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$.

■

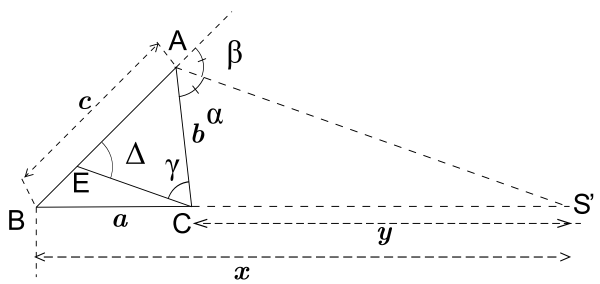
Obs: A recíproca desse teorema é verdadeira. Tente provar!

Bissetriz de um triângulo

Teorema da bissetriz externa (TBE)
Em um triângulo qualquer, a bissetriz externa de um ângulo externo divide o lado, externamente, em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo, tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja AS' bissetriz externa e $\alpha = \beta$, como na figura.



Pelo vértice C tracemos $CE//AS'$, conforme a figura.

Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \text{ (hipótese)} \\ \alpha &= \gamma \text{ (alternos internos)} \\ \beta &= \Delta \text{ (correspondentes)} \end{aligned}$$

Daí, $\gamma = \Delta$

Logo, o triângulo ACE é isósceles de base CE. Então, $\overline{AE} = \overline{AC} = b$.

Usando o teorema de Tales vem:

$$\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{EA}}.$$

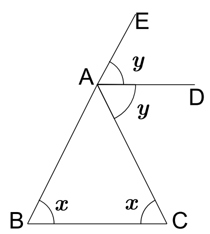
Como $\overline{BS'} = x$, $\overline{CS'} = y$, $\overline{BA} = c$ e $\overline{AE} = \overline{AC} = b$ temos que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$.

■

Obs.:

1. A recíproca desse teorema é verdadeira. Tente provar!

2. Em um triângulo isósceles ABC, de base BC, a bissetriz externa de vértice A é paralela à base. De fato, no ΔABC da figura, o ângulo $C\widehat{A}E$ mede $2y$; como é externo, temos $2y = x + x = 2x \quad \Rightarrow \quad y = x$. Logo, x e y são ângulos alternos internos.

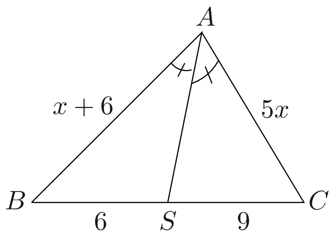


Daí, a bissetriz $\overline{AD}$ é paralela à base BC.

Note que neste caso não se aplica o Teorema da bissetriz externa.

Exercícios Resolvidos

3. Na figura, AS é bissetriz interna do triângulo ABC, calcule o valor de x.

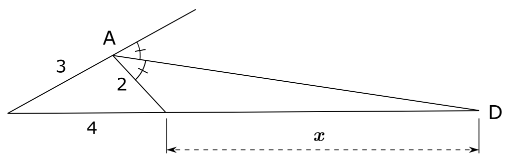


Solução:

Usando TBI vem:

$$\frac{6}{9} = \frac{x+6}{5x} \quad \Rightarrow \quad 30x = 9x + 54 \quad \Rightarrow \quad 21x = 54 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{54}{21} = \frac{18}{7}\,.$$

4. Na figura, AD é bissetriz externa do ângulo $\widehat{A}$. Calcule x.



Solução:

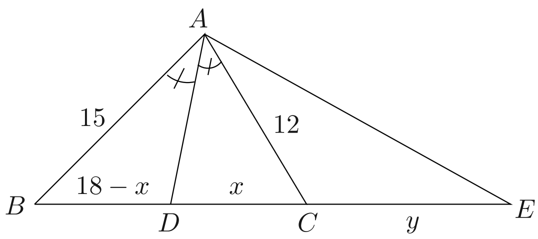
Usando TBE vem:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = 2x + 8 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

5. Os lados de um triângulo medem 12 cm, 15 cm e 18 cm. Do vértice oposto ao lado de maior medida tracem-se as bissetrizes interna e externa. Calcule a distância entre os pés dessas bissetrizes.

Solução:

Seja ABC o triângulo onde $\overline{BC} = 18$, $\overline{AB} = 15$ e $\overline{AC} = 12$, AD e AE são as bissetrizes interna e externa, como na figura.



Calculemos $\overline{DC} = x$ e $\overline{CE} = y$. Pelo TBI vem:

$$\frac{18-x}{x} = \frac{15}{12} \quad \Rightarrow \quad 15x = 216 - 12x \quad \Rightarrow \quad 27x = 216 \quad \Rightarrow \quad x = 8\,.$$

Pelo TBE vem:

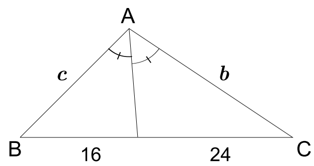
$$\frac{18+y}{y} = \frac{15}{12} \quad \Rightarrow \quad 15y = 216 + 12y \quad \Rightarrow \quad 3y = 216 \quad \Rightarrow \quad y = 72\,.$$

Logo, a distância entre as duas bissetrizes são $x + y = 8 + 72 = 80$ cm.

6. O perímetro de um triângulo é 100 metros. A bissetriz do ângulo interno A divide o lado oposto em dois segmentos de 16 metros e 24 metros. Determine os lados desse triângulo.

   Solução:

   Considere o triângulo ABC de perímetro 100 e $\overline{BC} = 40$, como na figura.



   De $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ vem:

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ a = 16 + 24 \\ \dfrac{16}{24} = \dfrac{c}{b} \ \ \text{(TBI)} \end{cases}.$$

   Daí, $b + c = 100 - 40 = 60$

$$\begin{cases} b + c = 60 \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{16}{24} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 60 - b \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{16}{24} \end{cases}$$

   Substituindo (1) em (2) vemos:

$$\frac{60-b}{b} = \frac{16}{24} \Rightarrow b = 36\,. \qquad (3)$$

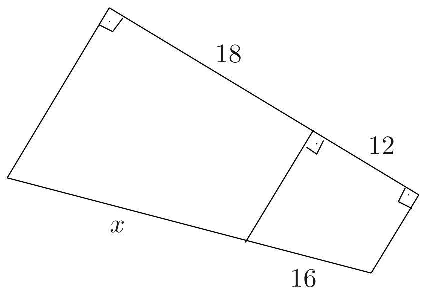
Substituindo (3) em (1) vem:

$$c = 60 - 36 = 24\,.$$

Os lados do triângulo são 36, 24 e 40.

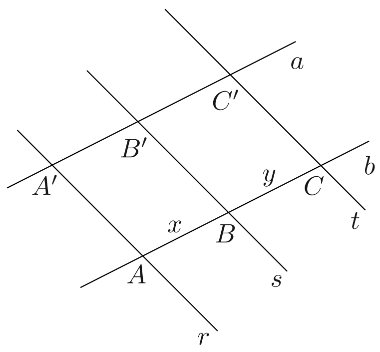
Exercícios Propostos

1. Na figura, calcule o valor de x.

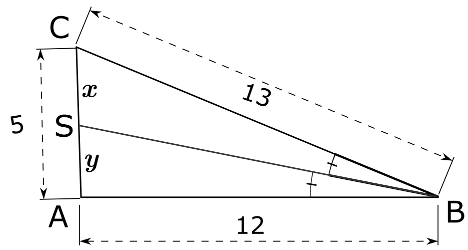


2. Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que este mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e quarta paralelas mede 60 cm.

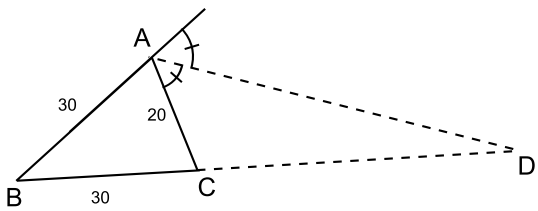
3. Na figura, $r//s//t$. Determine as medidas de x e y sabendo que são proporcionais a 3 e 4, respectivamente. O segmento $\overline{A'C'}$ mede 70 cm e as retas a e b são paralelas.



4. Na figura, calcule os valores de x e y, respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo B.



5. Na figura, sendo $\overline{AD}$ bissetriz externa do ângulo A, calcule $\overline{CD}$.



6. Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 12 cm e 18 cm. Do vértice oposto ao lado de maior medida traçam-se as bissetrizes internas e externas dos ângulos correspondentes. Calcule a distância entre os pés das bissetrizes.

Gabarito

1. $x = 24$

2. Os comprimentos são 15 cm, 18 cm e 27 cm, respectivamente.

3. $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$

4. $x = \dfrac{13}{5}$ e $y = \dfrac{12}{5}$

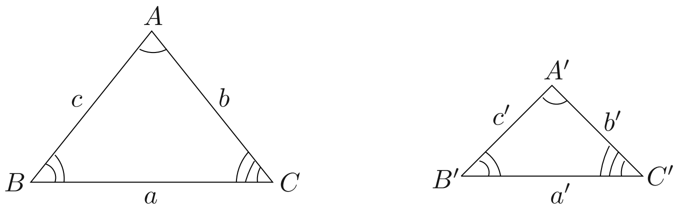
5. $\overline{CD} = 60$

6. $\dfrac{1080}{11}$ cm.

Aula 9 – Triângulos Semelhantes

Definição: Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.

A figura mostra dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes. Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.



Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são semelhantes.

$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ temos que os lados a e a' são homólogos

$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ temos que os lados b e b' são homólogos

$\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ temos que os lados c e c' são homólogos

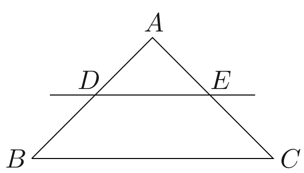
Vértices homólogos são os vértices de ângulos ordenadamente congruentes. Razão de semelhança é a razão de dois lados homólogos quaisquer.

Temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ se $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e também $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$; k é a razão de semelhança.

Teorema Fundamental: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

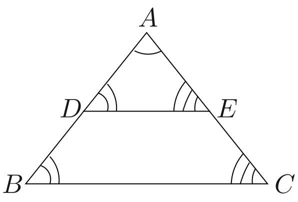
Prova:

Seja $\overleftrightarrow{DE}$ a reta paralela ao lado BC do triângulo ABC. Vamos provar que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



Para provarmos essa semelhança, precisamos provar que eles tem ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

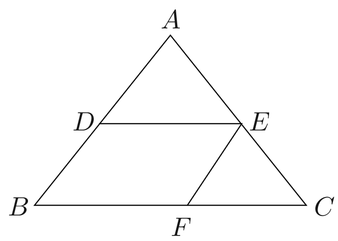
1) Os três ângulos ordenadamente congruentes.



De fato,

$$\begin{cases} \widehat{A} & \equiv & \widehat{A} \text{ (comum)} \\ \widehat{D} & \equiv & \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \\ \widehat{E} & \equiv & \widehat{C} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

2) Os lados homólogos são proporcionais.



De fato, pela hipótese, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad (1)$$

Tracemos $EF//AB$. Temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \quad (2)$$

Temos que o quadrilátero $DBFE$ é um paralelogramo e, portanto, $\overline{BF} = \overline{DE}$ (3). Substituindo (3) em (2), vem

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (4)$$

Das relações (1) e (4), temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

e os lados homólogos são proporcionais. Logo, os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

■

Observação: Dois triângulos congruentes são semelhantes, e a razão de semelhança é $k = 1$.

Exercícios Resolvidos

1. Os três lados de um triângulo ABC medem, respectivamente, 6 cm, 15 cm e 16 cm. Determine os lados de um triângulo $A'B'C'$ semelhante a ABC, sabendo que a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$ é igual a 4.

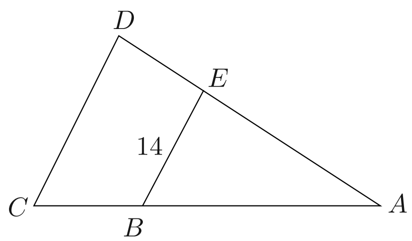
   Solução:

   Temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Denominando os lados do $\Delta A'B'C'$ de a', b' e c', vem:

$$\frac{6}{a'} = \frac{15}{b'} = \frac{16}{c'} = 4 \quad \begin{cases} a' = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ b' = \dfrac{15}{4} \\ c' = \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

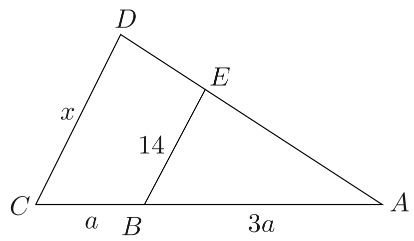
   Logo, os lados do $\Delta A'B'C'$ valem $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{4}$ e 4.

2. Na figura, $\overline{AB} = 3\left(\overline{BC}\right)$, $\overline{AE} = 3\left(\overline{DE}\right)$ e $\overline{BE} = 14$. Calcule $\overline{CD}$, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CD}$.



Solução:

Seja a figura, sendo $\overline{AB} = 3\left(\overline{BC}\right)$, $\overline{AE} = 3\left(\overline{DE}\right)$ e $\overline{BE} = 14$. Denotemos $\overline{CD} = x$, $\overline{CB} = a$, $\overline{AB} = 3a$.



Temos que $\Delta ABE \sim \Delta ACD$, já que $DC//BE$ (Teorema Fundamental):

$$\frac{x}{4a} = \frac{14}{3a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{56}{3}\,.$$

Logo, $\overline{CD} = \dfrac{56}{3}$.

3. Os lados de um triângulo medem 4 cm, 8 cm e 12 cm. Calcule as medidas dos lados de um triângulo semelhante, cujo perímetro mede 96 cm.

Solução:

Sejam x, y e z as medidas dos lados do triângulo procurado. Temos que $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{12}$ (definição) e $x + y + z = 96$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y + z & = & 96 \\ \dfrac{x}{4} & = & \dfrac{y}{8} & = & \dfrac{z}{12} \end{cases}$ usando a propriedade de proporção, vem:

$$\frac{x+y+z}{4+8+12} = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$\frac{96}{24} = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$4 = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$\Rightarrow \quad x = 16 \text{ cm}, \; y = 32 \text{ cm e } z = 48 \text{ cm}.$$

Casos de semelhança entre triângulos

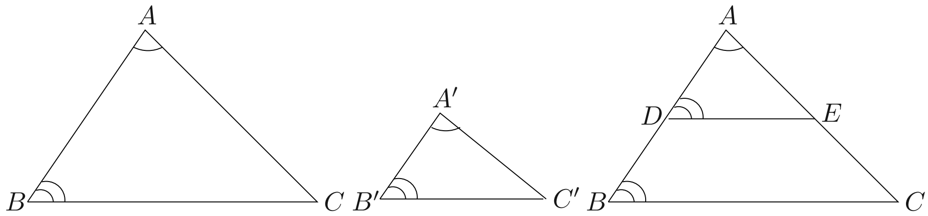
1º caso: AA∼

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ com $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Vamos provar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Se o lado $A'B'$ fosse congruente ao lado AB, os dois triângulos seriam congruentes pelo caso ALA, já que $\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{A} & = & \widehat{A'} \\ \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \overline{A'B'} & = & \overline{AB} \end{array}\right.$ e a semelhança estaria verificada ($k = 1$).



Supondo que AB não seja congruente a $A'B'$. Seja $\overline{A'B'} < \overline{AB}$.

Tomemos $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ sobre o lado AB e tracemos $DE//BC$, pelo Teorema Fundamental, vem:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \quad (1)$$

Vamos provar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Temos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{A} & = & \widehat{A'} \text{ (hipótese)} \\ \overline{AD} & = & \overline{A'B'} \text{ (construção)} \\ \widehat{D} & = & \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \end{array}\right.$$

o que implica (ALA) que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (2).

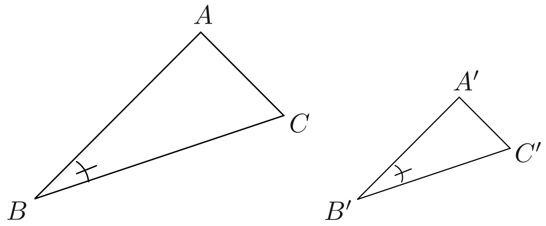
De (1) e (2) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

■

$2^{\underline{o}}$ caso: LAL $\sim$

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$.

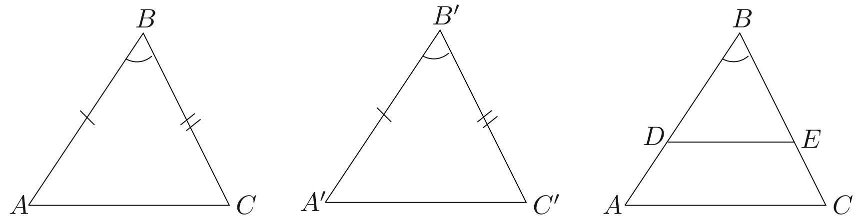


Então:

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

Prova:

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$. Se $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ então (LAL) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Vamos supor que AB e $A'B'$ não são congruentes e seja $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Tomemos $BD \equiv A'B'$ sobre o lado AB e tracemos DE paralela ao lado AC. Pelo Teorema Fundamental, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BDE \ (*)$$

Vamos provar que $\Delta BDE \equiv \Delta A'B'C'$.

De fato,

Se $DE//AC$, então $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (1).

Por construção, $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ (2).

De (1) e (2) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (3), mas, por hipótese, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (4).

De (3) e (4) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{B'C'}$.

Logo:

$$\left\{\begin{array}{lcl} BD & \equiv & A'B' \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{B'} \\ BE & \equiv & B'C' \end{array}\right. \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \quad \Delta BDE \equiv \Delta A'B'C' \ \ (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ vem que: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

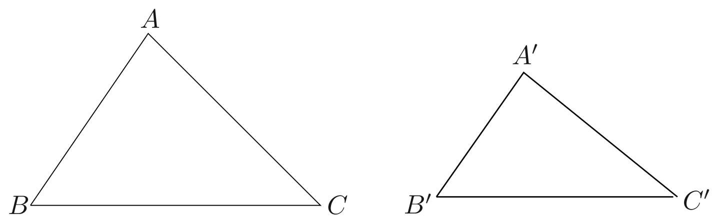
$\blacksquare$

$3^{\underline{o}}$ **caso: LLL$\sim$**

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

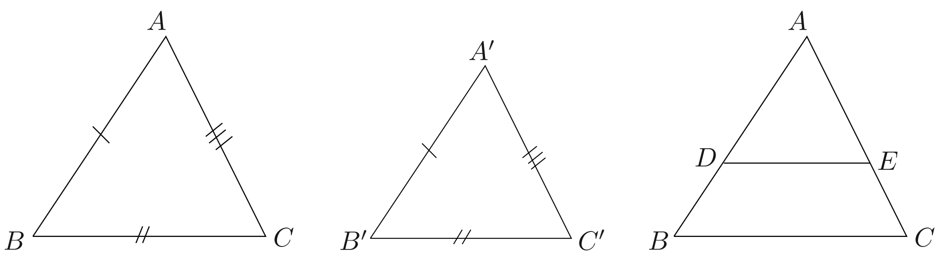


Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, tal que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (1).

Se os lados AB e $A'B'$ são congruentes, de (1) que $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$. Daí, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (LLL) e o teorema está provado.

Vamos supor que AB e $A'B'$ não são congruentes. Seja então $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Tomemos $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ sobre o lado AB e tracemos $DE//BC$.



Pelo Teorema Fundamental, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \ \ (1)$$

Vamos provar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$.

De (1), vem que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad (2)$$

Por construção, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ (3).

De (2) e (3), vem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad (4)$$

Mas, por hipótese, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad (5)$

De (4) e (5), vem: $\overline{AE} = \overline{A'C'}$ (6) e $\overline{DE} = \overline{B'C'}$ (7), então

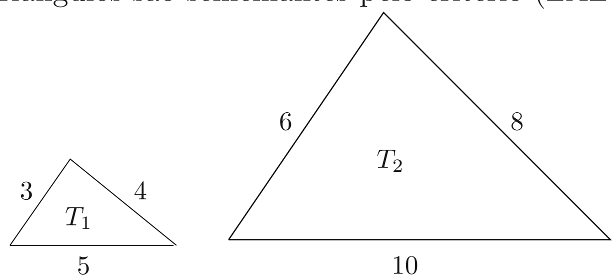
$$\left\{\begin{array}{lcl} AD & \equiv & A'B' \text{ (construção)} \\ AE & \equiv & A'C' \text{ (6)} \\ DE & \equiv & B'C' \text{ (7)} \end{array}\right. \quad \overset{LLL}{\Rightarrow} \quad \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \text{ (8)}$$

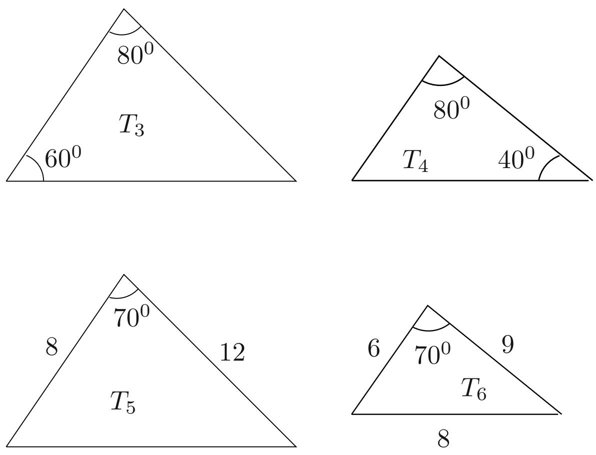
De (1) e (8), vem que: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, caso de congruência LLL.

■

Exercícios Resolvidos

1. Associar as alternativas seguintes com pares de triângulos T_1, T_2, $\cdots$, abaixo.
   a) Os triângulos são semelhantes pelo critério (AA∼)
   b) Os triângulos são semelhantes pelo critério (LLL∼)
   c) Os triângulos são semelhantes pelo critério (LAL∼)





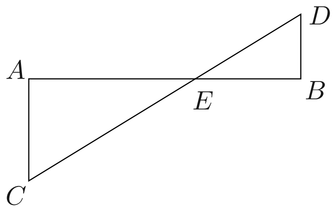
Solução:

1) $T_1 \sim T_2$ (b) (critério LLL$\sim$) já que: $\dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10}$.

2) $T_3 \sim T_4$ (a) (critério AA$\sim$) pois o terceiro ângulo do triângulo T_3 é: $180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$ e daí temos nesses dois triângulos dois ângulos congruentes, que são 80^0 e 40^0.

3) $T_5 \sim T_6$ (c) (critério LAL$\sim$) já que: $\dfrac{8}{6} = \dfrac{12}{9}$, e o ângulo compreendido entre esses dois lados é congruente a (70^0).

2. Na figura, $AC//BD$, e os pontos C, D e E são co-lineares. Sabendo que $\overline{AE} = 14$ cm, $\overline{AC} = 18$ cm e $\overline{BE} = 10$ cm, calcule a medida do lado BD.



Solução:

Temos que:

$A\widehat{E}C \equiv B\widehat{E}D$ (ângulos opostos pelo vértice)

$B\widehat{D}E \equiv A\widehat{C}E$ (alternos internos)

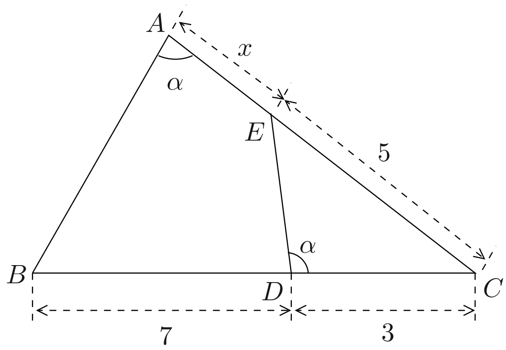
$\underset{\text{AA}\sim}{\Longrightarrow}$

$\Delta BDE \sim \Delta ACE$.

Portanto:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{18} = \frac{10}{14} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{90}{7} \text{ cm}\,.$$

3. Com os dados da figura, calcule x.



Solução:

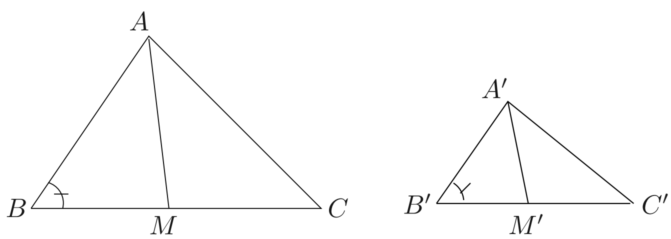
$$\Delta ABC \sim \Delta CDE, \text{ pois } \begin{cases} E\widehat{D}C = B\widehat{A}C = \alpha \\ \widehat{C} \text{ é comum} \end{cases}.$$

Temos então o $1^{\underline{o}}$ caso de semelhança. Logo:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{5+x} \Rightarrow 30 = 25 + 5x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1\,.$$

4. Considere dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$, de razão k e medianas homólogas AM e $A'M'$. Mostre que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = k$.

Solução:



Seja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, de razão k e medianas homólogas AM e $A'M'$.
Então:

$$\begin{cases} (1) \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ (ângulos homólogos)} \\ (2) \quad \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \end{cases}$$

De (2) vem:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{B'C'}} = k \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}} = k\,.$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}} = k \end{cases} \overset{LAL\sim}{\Rightarrow} \Delta ABM \sim \Delta A'B'M' \,.$$

Logo:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = k \,.$$

Observação:

Em dois triângulos semelhantes, se a razão de semelhança é k, então:

A razão entre os perímetros é k

A razão entre as alturas homólogas é k

A razão entre as bissetrizes internas homólogas é k

A razão entre os raios dos círculos inscritos é k

A razão entre os raios dos círculos circunscritos é k

$\vdots$

A razão entre dois elementos lineares homólogos é k .

---

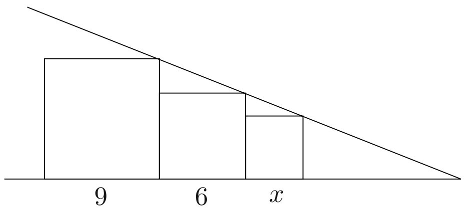
5. Dois triângulos semelhantes têm perímetros 60 cm e 48 cm. Quanto mede a altura do primeiro, sabendo-se que a altura homóloga do segundo mede 9 cm?

Solução:

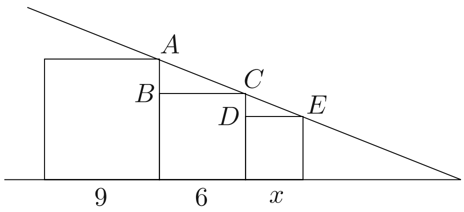
Considere dois triângulos semelhantes, cujos perímetros são 60 cm e 48 cm. Pela observação, temos que $\frac{60}{48} = \frac{h}{9}$, onde h é a altura homóloga do primeiro triângulo. Então:

$$h = \frac{9 \cdot 60}{48} = \frac{45}{4} \;\Rightarrow\; h = \frac{45}{4} \text{ cm} \,.$$

6. Na figura a seguir, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado x.



Solução:



Considere na figura os quadrados de lados x, 6 e 9.

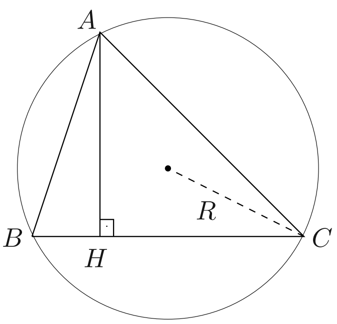
Temos $\Delta ABC \sim \Delta CED$, pois $\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{D} \equiv 90^0 \\ B\widehat{A}C \equiv D\widehat{C}E \end{cases}$ (AA $\sim$).

Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{9-6}{6-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3x = 6(6-x) \Rightarrow 3x = 36 - 6x \Rightarrow$$

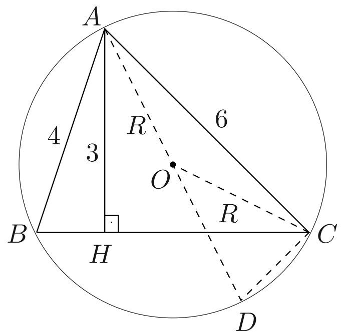
$$\Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4.$$

7. Calcular R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.



Solução:

Seja a figura dada, com $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.



Trace o diâmetro AD. Temos que $\Delta ABH \sim \Delta ACD$, pois:

$$\begin{cases} A\widehat{H}B = 90^0 = A\widehat{C}D & \text{(ângulo inscrito e note que } AD \text{ é diâmetro)} \\ A\widehat{B}H = A\widehat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} & \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

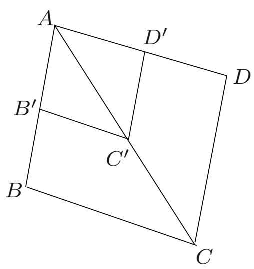
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{4}{2R} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6R = 24 \Rightarrow R = 4\,.$$

Polígonos Semelhantes

Definição: Dois polígonos quaisquer com um mesmo número de lados são semelhantes se têm ordenadamente congruentes todos os ângulos e os lados homólogos proporcionais.

Exemplo:

Considere um quadrilátero qualquer $ABCD$ e um ponto B' sobre o lado AB, conforme a figura.



Tracemos as diagonais de um mesmo vértice e os segmentos $B'C'$ e $C'D'$, respectivamente paralelos a BC e CD.

Temos assim o paralelogramo $AB'C'D'$. Os quadriláteros $ABCD$ e $AB'C'D'$ são semelhantes pois têm:

a) $\widehat{A} = \widehat{A}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\widehat{D} = \widehat{D'}$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{AB'} = \dfrac{\overline{BC}}{B'C'} = \dfrac{\overline{CD}}{C'D'} = \dfrac{\overline{DA}}{D'A}$ pela construção de paralelas.

Observação:

A notação para os polígonos semelhantes é análoga à dos triângulos semelhantes. Assim,

B e B' são vértices homólogos;

AB e AB' são lados homólogos;

$\dfrac{\overline{AB}}{AB'} = k$ é a razão de semelhança.

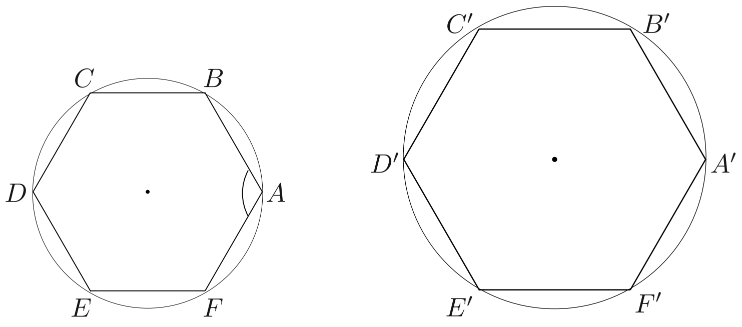
Teorema: Dois polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes.

Prova:

Considere os dois polígonos regulares de p e p'. Vamos mostrar que p e p' têm seus ângulos ordenadamente congruentes e seus lados homólogos proporcionais.

1º: Em cada um desses polígonos, cada ângulo interno mede $\dfrac{180^0(n-2)}{n}$, e daí todos os ângulos são ordenadamente congruentes e em particular congruentes entre si.

$2^{\underline{o}}$. Os lados AB, BC, CD, $\cdots$ do primeiro polígono são congruentes entre si, o mesmo ocorrendo com os lados $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $\cdots$ do segundo polígono.



Daí:

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \ldots = k\,.$$

Daí, $p \sim p'$

■

8. A razão entre os perímetros de dois hexágonos regulares é $\frac{1}{4}$. Sabendo-se que o lado maior de um dos hexágonos mede 45 cm, calcule a medida do lado menor.

Solução:

Seja x a medida do lado que queremos. Os polígonos regulares são semelhantes, então à razão entre os perímetros é igual à razão entre os lados homólogos.

$$\frac{x}{45} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x = \frac{45}{4}\,.$$

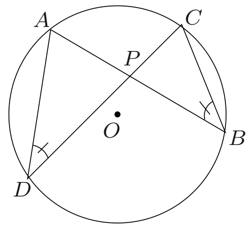
Daí, o lado menor é $\frac{45}{4}$ cm.

Relações métricas em um círculo

Teorema das cordas: Se duas cordas se encontram, então o produto das medidas dos dois segmentos de uma é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

Prova:

Sejam as cordas AB e CD que se encontram em P no círculo.



Temos que $\Delta PAD \sim \Delta PCB$, pois:

$$\begin{cases} A\widehat{P}D \equiv C\widehat{P}B & \text{(opostos pelo vértice)} \\ A\widehat{D}P \equiv P\widehat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} & \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

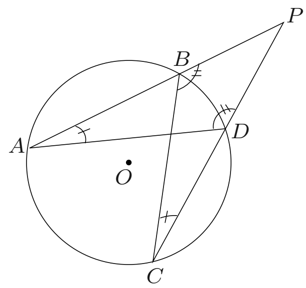
(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}\,.$$

■

Teorema das Secantes: Se de um ponto exterior a um círculo traçamos duas secantes, então o produto das medidas de uma secante por sua parte exterior é igual ao produto das medidas da outra pela sua parte exterior.

Prova:



Sejam as secantes PA e PC que se encontram em P. Ligue os pontos A com D e B com C. Temos que $\Delta PAD \sim \Delta PCB$, pois:

$$\begin{cases} \widehat{P} \quad \text{(comum)} \\ P\widehat{A}D = B\widehat{C}P = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} \quad \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}\,.$$

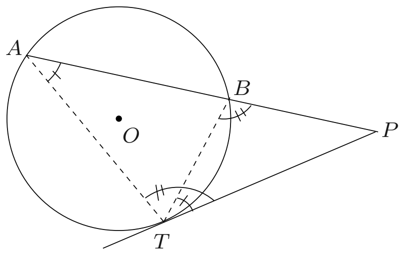
■

Teorema: Se de um ponto exterior a um círculo traçamos uma tangente e uma secante, então a medida do segmento da tangente é média geométrica entre as medidas do segmento da secante.

Nota: Dados os números reais positivos a e b, chama-se média geométrica entre a e b o número x positivo tal que $x^2 = ab$.

Prova:

Seja P exterior a um círculo, PA secante e PT tangente ao círculo.



Ligue os pontos A e B ao ponto T, conforme a figura.

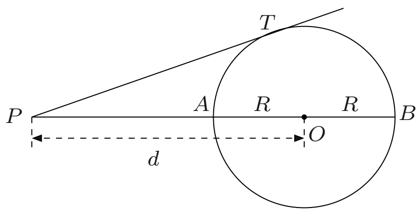
Temos que $\Delta PAT \sim \Delta PTB$, pois:

$$\begin{cases} \widehat{P} \ \text{(comum)} \\ B\widehat{A}T = B\widehat{T}P = \dfrac{\overset{\frown}{BT}}{2} \ \text{(ângulo inscrito e de segmento)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \ \Rightarrow \ \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}\,.$$

Nota: No caso de a secante passar pelo centro do círculo e sendo d a distância de P ao centro do círculo e R o raio desse círculo, temos:



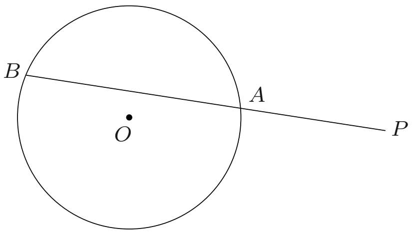
$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d - R)(d + R) \ \Rightarrow \ \overline{PT}^2 = d^2 - R^2\,.$$

■

Potência de um ponto em relação a um círculo

Consideremos em um plano uma circunferência e um ponto P, o qual poderá ser exterior ou interior a ela, ou mesmo pertencer à circunferência.

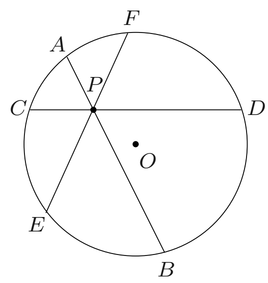
Por P traçamos uma reta que encontra a circunferência em dois pontos distintos A e B.



Definição: O produto $PA \cdot PB$ é denominado potência do ponto P em relação ao círculo de centro O. Notação: $\text{Pot}_O P$

.

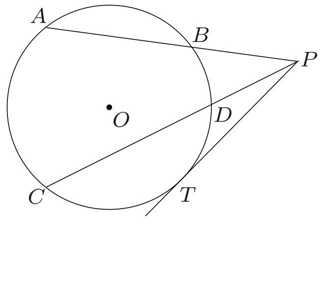
Considere a figura a seguir.



Temos:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PF} = \text{ constante (Teorema das Cordas)}\,.$$

Considere, agora, a figura a seguir.



Temos:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PT}^2 = \text{ constante (teorema anterior)}\,.$$

Nota:

Sabemos que $\overline{PT}^2 = d^2 - R^2$, onde d é a distância de um ponto ao centro do círculo de raio R, situado no mesmo plano. Então:

1) A potência de P em relação ao círculo será positiva se $d > R$, pois:

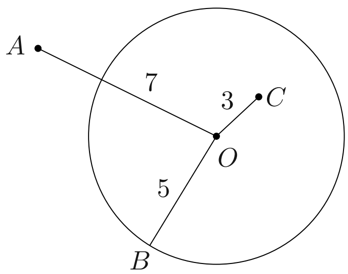
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 = d^2 - R^2 = \text{Pot}_{\text{O}} P\,.$$

2) A potência de P em relação ao círculo é negativa se $d < R$.

3) A potência de P em relação ao círculo é nula se $d = R$.

4) A potência de P em relação ao círculo é mínima se $d = 0$.

9. Considere a figura. Calcule $\text{Pot}_{\text{O}} A + \text{Pot}_{\text{O}} B + \text{Pot}_{\text{O}} C$.



Solução:

Temos que $\text{Pot}_{\text{O}} R = d^2 - R^2$.

$$\text{Pot}_{\text{O}} A = 7^2 - 5^2$$

$$\text{Pot}_{\text{O}} B = 5^2 - 5^2$$

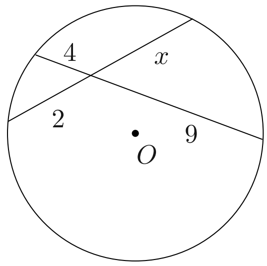
$$\text{Pot}_{\text{O}} C = 3^2 - 5^2$$

o que implica

$$\begin{aligned}\text{Pot}_{\text{O}} A + \text{Pot}_{\text{O}} B + \text{Pot}_{\text{O}} C &= 7^2 - 5^2 + 5^2 - 5^2 + 3^2 - 5^2 \\ &= 49 - 25 + 9 - 25 \\ &= 8\,.\end{aligned}$$

10. Calcule x nas figuras a seguir:

a)

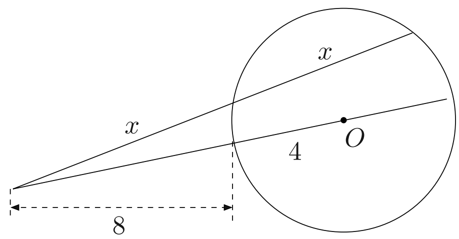


Solução:

Pelo Teorema das Cordas, vem:

$$2 \cdot x = 4 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad x = 18\,.$$

b)

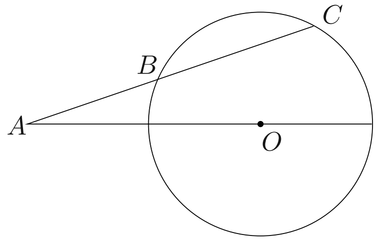


Solução:

Pelo Teorema das Secantes, vem:

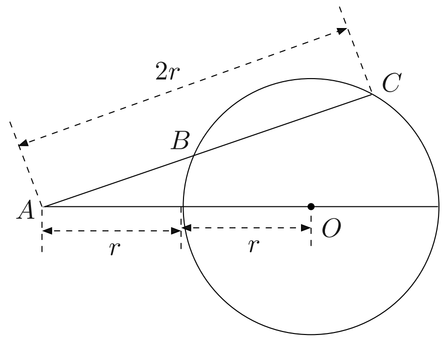
$$x \cdot 2x = 8 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 8 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 8\,.$$

11. Na figura, ABC representa um trecho reto de uma estrada que cruza o pátio circular de centro O e raio r. Se $\overline{AC} = 2r = \overline{AO}$, determine a medida de BC em função da medida de AB.



Solução:

Considere a figura, com $\overline{AC} = 2r = \overline{AO}$.



Denominando $\overline{AB} = x$, vem:

Usando o Teorema das secantes,

$$x \cdot 2r = r \cdot 3r \;\Rightarrow\; x = \frac{3r}{2}\,.$$

Temos que:

$$\overline{BC} = 2r - \frac{3r}{2} = \frac{r}{2}\,.$$

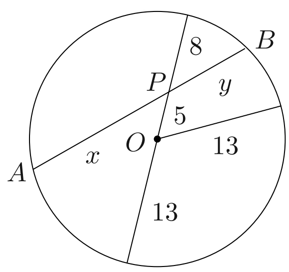
Logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{3r}{2}}{\frac{r}{2}} = 3 \;\Rightarrow\; \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{3}\,.$$

12. O ponto P está no interior de uma circunferência de 13 cm de raio e dista 5 cm do centro da mesma. Pelo ponto P, traça-se a corda AB de 25 cm. Determine os comprimentos que P determina sobre a corda AB.

Solução:

Temos que P está no interior de uma circunferência de 13 cm de raio e dista 5 cm do centro da mesma e a corda $\overline{AB} = 25$.



Vamos denominar $\overline{AP} = x$ e $\overline{PB} = y$. Então, usando o Teorema das Cordas, vem:

$$18 \cdot 8 = x \cdot y \;\text{ e }\; x + y = \overline{AB} = 25\,.$$

Daí,

$$\begin{cases} xy &= 144 \ (1) \\ x+y &= 25 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \ x = 25 - y \ (3)\,.$$

Substituindo (3) em (1), vem:

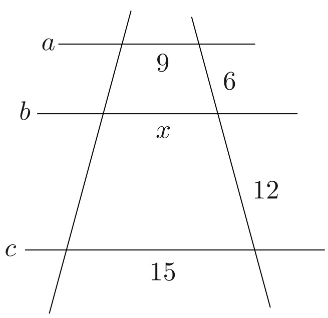
$$\begin{aligned} (25-y)y = 144 \ &\Rightarrow \ y^2 - 25y + 144 = 0 \\ &\Rightarrow \ y = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} \\ &\Rightarrow \ y = \frac{25+7}{2} = 16 \ \text{ ou } \ y = \frac{25-7}{2} = 9 \end{aligned}$$

Assim, $x = 25 - 16 = 9$ ou $x = 25 - 9 = 16$.

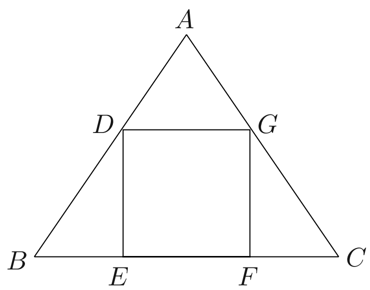
Logo, os comprimentos pedidos são 16 cm e 9 cm.

Exercícios Propostos

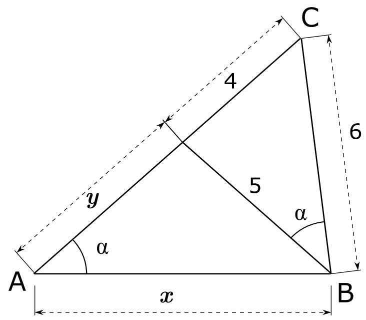
1. Calcule o valor de x na figura, sabendo que r e s são transversais que cortam as paralelas a, b e c.



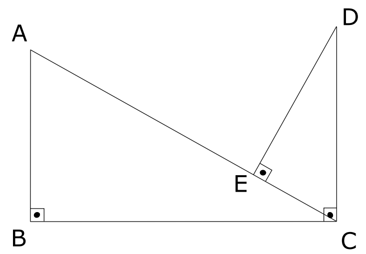
2. A figura mostra um quadrado $DEFG$ inscrito em um triângulo ABC. Sabendo que a base BC mede 15 cm e que a altura relativa a essa base mede 10 cm, calcule a medida do lado desse quadrado.



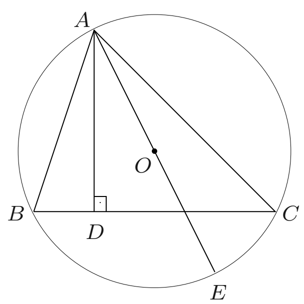
3. No triângulo ABC da figura, calcule os valores de x e y.



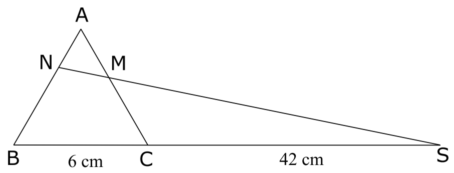
4. Na figura temos $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 16$, $\overline{AC} = \sqrt{337}$ e $\overline{EC} = 5$. Determine $\overline{DE}$ e $\overline{CD}$.



5. Calcule a altura $\overline{AD}$ do triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e de diâmetro $\overline{AE} = 7,5$ cm e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo, respectivamente, 5 cm e 6 cm.



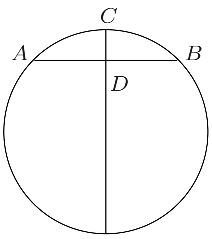
6. Na figura, ABC é um triângulo eqüilátero de lado 6 cm e M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$. Calcule o segmento $\overline{NB}$.



7. As bases de um trapézio medem 4 m e 6 m, respectivamente, e a altura mede 8 m. Calcule a que distância da base maior cortam-se as diagonais.

8. Mostre que, em um paralelogramo, dois lados consecutivos são inversamente proporcionais às alturas correspondentes.

9. Se, no círculo da figura, $\overline{AB}$ vale 10, $\overline{CD}$ vale 2, $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{CD}$ e D é o ponto médio de $\overline{AB}$, calcule o diâmetro do círculo.



10. Por um ponto P distante 9 cm do centro de um círculo de 7 cm de raio, traça-se a secante PBC ao círculo de modo que $\overline{PB}$ vale a metade de $\overline{PC}$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{PC}$.

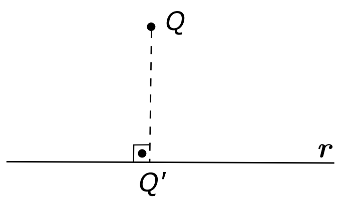
Gabarito

1. 11.
2. 6.
3. $x = \dfrac{15}{2}$, $y = 5$.
4. $\overline{DE} = \dfrac{80}{9}$, $\overline{CD} = \dfrac{5\sqrt{337}}{9}$.
5. 4.
6. $\overline{NB} = 3,2$ cm.
7. 4,8 metros.
8. demonstração.
9. $\dfrac{29}{2}$.
10. 8.

Aula 10 – Triângulo Retângulo

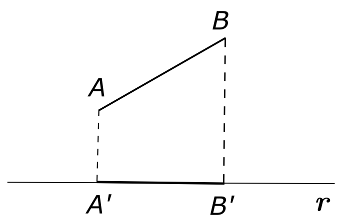
Projeção ortogonal

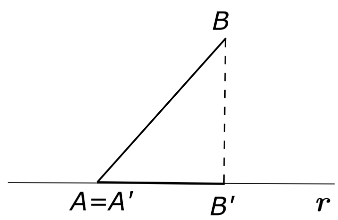
Em um plano, consideremos um ponto e uma reta. Chama-se *projeção ortogonal* desse ponto sobre essa reta o pé da perpendicular traçada do ponto à reta.
Na figura, o ponto Q' é a projeção ortogonal de Q sobre r.



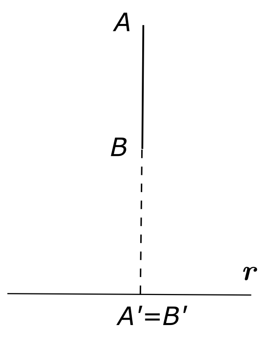
Projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos desse segmento.

Nas figuras, a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r é o segmento A'B'.





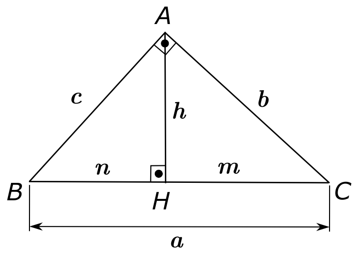
Note que a projeção ortogonal de um segmento cuja reta suporte é perpendicular à reta é o ponto $A' = B'$.



Relações métricas nos triângulos retângulos

Elementos

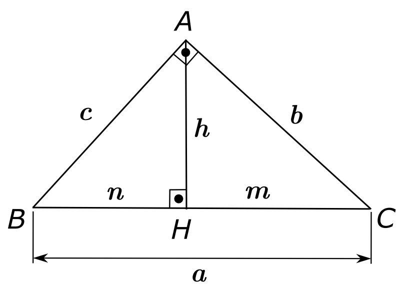
Considere a figura:



$\overline{BC} = a$ é a hipotenusa.
$\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são os catetos.
$\overline{AH} = h$ é a altura relativa à hipotenusa.
$\overline{BH} = n$ e $\overline{CH} = m$ são, respectivamente, as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

Relações

No triângulo retângulo ABC da figura, sendo:



$\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$,
$\overline{AB} = c$, $\overline{AH} = h$,
$\overline{BH} = n$, e $\overline{CH} = m$

então valem as seguintes relações:

1) $m + n = a$;

2) $b^2 = a \cdot m$;

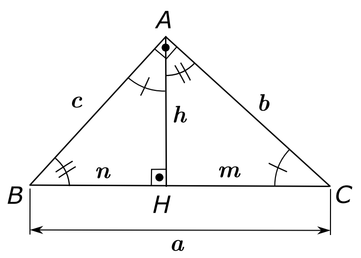
3) $b \cdot c = a \cdot h$;

4) $c^2 = a \cdot n$;

5) $b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras);

6) $h^2 = m \cdot n$.

Prova:
Seja o ΔABC retângulo, sendo $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c, \overline{AH} = h, \overline{BH} = n$ e $\overline{CH} = m$.



Como

$$\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC} \Rightarrow n + m = a \quad (1)$$

Considere os triângulos AHC e ABC,

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mathrm{C}} \text{ comum} \\ \\ \mathrm{A\hat{H}C} = \mathrm{B\hat{A}C} = 90^\circ \end{array}\right. \underset{\mathrm{AA}\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHC \sim \Delta ABC$$

Daí,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b^2 = a \cdot m & (2) \\ b \cdot c = a \cdot h & (3) \end{array}\right.$$

Considere os triângulos AHB e ABC

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mathrm{B}} \text{ comum} \\ \\ \mathrm{A\hat{H}B} = \mathrm{B\hat{A}C} = 90^\circ \end{array}\right. \underset{\mathrm{AA}\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHB \sim \Delta ABC$$

Daí

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad (4)$$

Somando (2) e (4):

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n)$$

De (1)

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

Daí

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (5)$$

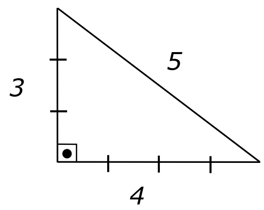
Multiplicando (2) e (4) vem:

$$b^2 \cdot c^2 = a \cdot m \cdot a \cdot n = a^2 m \cdot n,$$

De (3) vem:

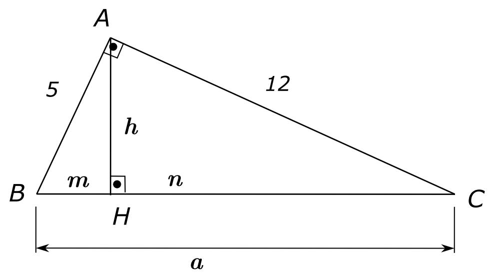
$$a^2 \cdot h^2 = a^2 m \cdot n, a \neq 0 \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad (6)$$

Observação:
Triângulos pitagóricos são triângulos retângulos cujos lados têm por medida números inteiros.
Exemplo: Os triângulos cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5 são retângulos e também pitagóricos.



Exercícios Resolvidos

1. No triângulo retângulo da figura, calcule a, h, m e n.



Solução:
Do resultado anterior, temos:

De (5) vem: $5^2 + 12^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

De (2) vem: $5^2 = 13m \Rightarrow m = \dfrac{25}{13}$

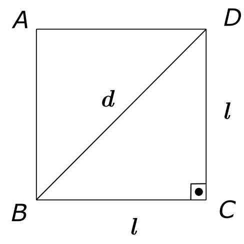
De (1) vem: $\dfrac{25}{13} + n = 13 \Rightarrow n = 13 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{144}{13} \Rightarrow n = \dfrac{144}{13}$

De (6) vem: $h^2 = \dfrac{25}{13} \cdot \dfrac{144}{13} \Rightarrow h = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13} \Rightarrow h = \dfrac{60}{13}$

2. Calcule a medida de cada diagonal de um quadrado em função da medida l dos lados.

Solução:

Seja $ABCD$ um quadrado de lado l e $\overline{BD}$ uma diagonal cuja medida é d.



Usando (5) vem:

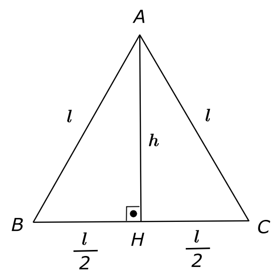
$$l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$$

Cada diagonal vale $l\sqrt{2}$.

3. Calcule a medida de cada altura de um triângulo equilátero em função da medida l dos lados.

Solução:

Seja ABC um triângulo equilátero de lado l e $\overline{AH} = h$ (altura).



Considere o triângulo retângulo AHC. Como a altura é a mediana no triângulo equilátero, vem:

$$\overline{BH} = \overline{HC} = \frac{l}{2}$$

Daí, por (5) vem:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, cada altura é $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

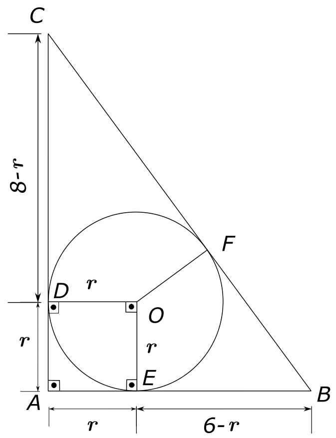
4. Calcule o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm.

Solução:

Seja ABC o triângulo retângulo em A e r o raio do círculo inscrito.

A medida da hipotenusa $\overline{BC}$ é:

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{BC} = 10\ cm$$



Temos por resultado anterior que:

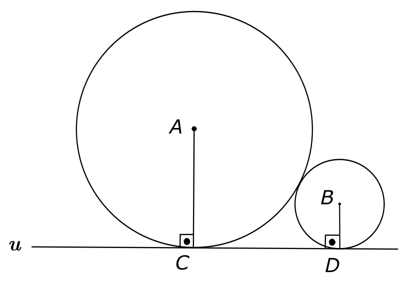
$$\overline{CD} = \overline{CF} = 8 - r$$
$$\overline{BE} = \overline{BF} = 6 - r$$

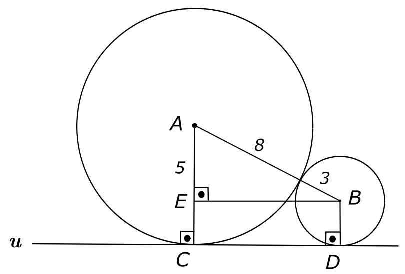
Temos que:

$$\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF} = 8 - r + 6 - r = 10$$

$$\Rightarrow 14 - 2r = 10 \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2.$$

5. Na figura, as circunferências de centros A e B e raios 8 cm e 3 cm, respectivamente, são tangentes exteriormente e tangenciam à reta u nos pontos C e D. Calcule a medida do segmento CD.





Solução:
Se as circunferências são tangentes exteriormente, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos raios, ou seja,

$$\overline{AB} = 3 + 8 = 11$$

Traçando por B a paralela à tangente u, BE, temos:

$$\overline{AE} = 8 - 3 = 5 \Rightarrow \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow$$

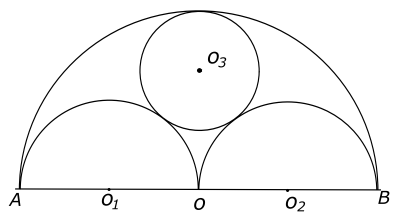
$$5^2 + \overline{EB}^2 = 11^2 \Rightarrow \overline{EB}^2 = 121 - 25 = 96$$

$$\Rightarrow \overline{EB} = 4\sqrt{6}$$

Mas $EBDC$ é retângulo $\Rightarrow \overline{EB} = \overline{CD} = 4\sqrt{6}$ cm.
Logo,

$$\overline{CD} = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

6. Dada a figura em que $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$ metros, calcule o raio do círculo de centro O_3.



Solução:
Seja r o raio do círculo de centro O_3,

$$\overline{OO_3} = 6 - r, \ \overline{O_2O_3} = 3 + r \quad \text{e} \quad \overline{OO_2} = \frac{6}{2} = 3$$

Temos que no $\Delta\ OO_3O_2$, usando Teorema de Pitágoras, vem:

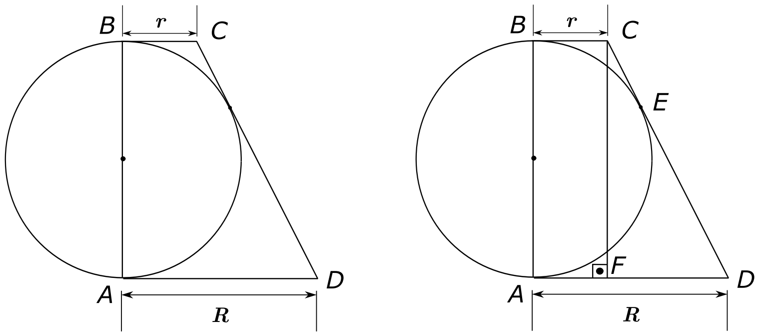
$$\overline{OO_3}^2 + \overline{OO_2}^2 = \overline{O_2O_3}^2 \Rightarrow (6-r)^2 + 3^2 = (3+r)^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12r + r^2 + 9 = 9 + 6r + r^2 \Rightarrow 18r = 36$$

$$\Rightarrow r = 2$$

Daí, o raio do círculo de centro O_3 é 2 metros.

7. Na figura, calcule a altura do trapézio retângulo $ABCD$.



Solução:
Seja E a interseção de $\overline{CD}$ com a circunferência dada. Temos que:

$$\overline{BC} = \overline{CE} \text{ e } \overline{AD} = \overline{DE} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = r + R$$

Traçando $\overline{CF}$ paralela a AB passando por C vem que:

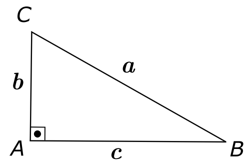
$$\overline{CF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{CF}^2 + (R-r)^2 = (r+R)^2$$
$$\Rightarrow \overline{CF}^2 = r^2 + 2rR + R^2 - R^2 + 2rR - r^2 = 4rR$$
$$\Rightarrow \overline{CF} = 2\sqrt{Rr}$$

Como $ABCF$ é retângulo, temos que $\overline{AB} = \overline{CF}$.
Daí, a altura pedida é $\overline{AB} = 2\sqrt{Rr}$.

Teorema: Lei dos co-senos
Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo co-seno do ângulo por ele formado.

Nota:

1) Seja um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c.



$\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos. Pelo Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} \\[2ex] \cos \hat{B} = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a} \\[2ex] \operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{b}{c} \\[2ex] \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \end{cases}$$

2) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha)$, $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$

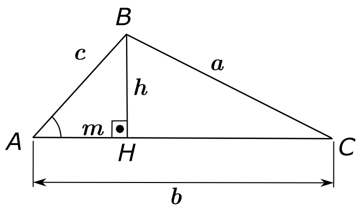
3)

θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\operatorname{sen} \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Prova:

Seja o triângulo ABC, vamos provar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$



Trace a altura $\overline{BH} = h$ relativa ao lado $\overline{AC}$ e denomine $\overline{AH} = m$.

$$\Delta\ ABH \begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 & (1) \\ \cos \hat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A} & (2) \end{cases}$$

$$\Delta\ BCH \begin{cases} a^2 = h^2 + (b-m)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 \\ \Rightarrow a^2 = b^2 + h^2 + m^2 - 2 \cdot b \cdot m \quad (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3) vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

De maneira similar:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Natureza de um triângulo (Síntese de Clairaut)

Observando a lei dos co-senos em um triângulo ABC onde $a > b$ e $a > c$, temos:

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ é acutângulo} \\ \hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ é retângulo} \\ \hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ é obtusângulo} \end{cases}$$

Portanto, dado um triângulo cujos lados medem a, b e c, se $a > b$ e $a > c$, então os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos.

Para determinar a natureza do terceiro ângulo, comparamos o quadrado da maior medida com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Exemplo:

1) Um triângulo cujos lados medem 6, 8 e 9 é acutângulo porque $9^2 < 6^2 + 8^2$.

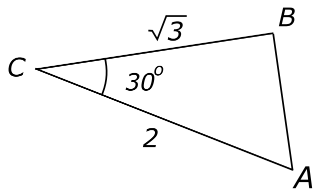
2) Um triângulo cujos lados medem 12, 16 e 20 é retângulo porque $20^2 = 12^2 + 16^2$.

3) Um triângulo cujos lados medem 6, 9 e 13 é obtusângulo porque $13^2 > 6^2 + 9^2$.

Exercícios Resolvidos

8. Dado um triângulo ABC tal que $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\hat{C}B = 30^\circ$. Determine a medida do lado AB.

Solução:
Seja o triângulo ABC, tal que $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\hat{C}B = 30°$.



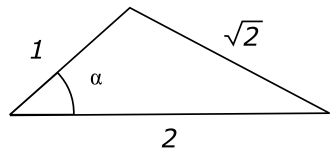
Usando a lei dos co-senos, vem:

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \hat{C}$$

$$\overline{AB}^2 = 4 + 3 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 1$$

9. Na figura, calcule $\cos \alpha$.

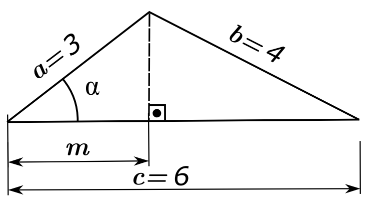


Solução:
Pela lei dos co-senos, vem:

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$
$$2 = 1 + 4 - 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow 2 - 5 = -4 \cos \alpha$$
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

10. Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm, calcule a projeção do lado a sobre o lado c.

Solução:
Seja o triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm. Seja a projeção do lado a sobre o lado c.



Pela lei dos co-senos vamos encontrar $\cos \alpha$.

$$4^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

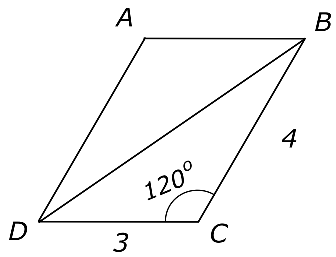
$$16 = 45 - 36 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 36 \cdot \cos\alpha = 29 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{29}{36}$$

Temos que $\cos\alpha = \dfrac{m}{3} \Rightarrow m = 3 \cdot \cos\alpha$
Logo,

$$m = 3 \cdot \frac{29}{36} \Rightarrow m = \frac{29}{12}$$

11. Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados 3 e 4 medem 120°. Calcule a maior diagonal deste paralelogramo.

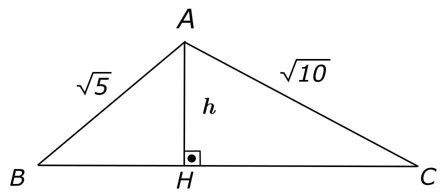
Solução:
Seja o paralelogramo $ABCD$ de lados 3 e 4 e um dos ângulos internos vale 120°.



$\overline{BD}$ é a maior diagonal. Usando a lei dos co-senos, vem:
$\overline{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120°$
$\overline{BD}^2 = 9 + 16 - 24 \cdot (-\cos 60°)$
$\overline{BD}^2 = 25 - 24 \cdot (-\frac{1}{2})$
$\overline{BD}^2 = 37 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{37}$

12. Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

Solução:
Seja um triângulo ABC cujos lados medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. O maior lado é 5.



Seja $h = \overline{AH}$ a altura relativa ao lado BC.
Usando a lei dos co-senos, vamos achar $\cos\hat{B}$.

$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{5})^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\hat{B}$$

$$10 = 5 + 25 - 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\hat{B}$$

$20 = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \hat{B}$

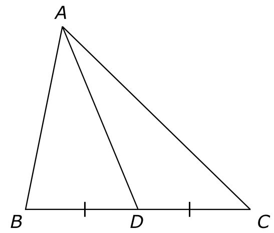
$\cos \hat{B} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, mas $\cos \hat{B} = \dfrac{\overline{BH}}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{BH}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \overline{BH} = 2$

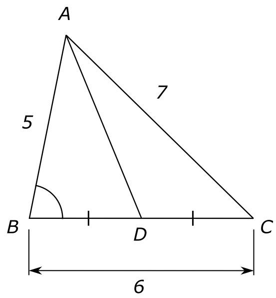
Usando o Teorema de Pitágoras no Δ ABH, vem:

$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 5 - 4 \Rightarrow h = 1$$

13. Na figura, D é ponto médio do lado BC. Sendo $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm, calcule a medida do segmento AD.



Solução:
Seja a figura dada, D é ponto médio do lado BC, $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm.



Usando a lei dos co-senos para o Δ ABC, vem:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{B}$

$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \hat{B}$

$49 = 25 + 36 - 60 \cos \hat{B} \Rightarrow 49 = 61 - 60 \cos \hat{B}$

$\Rightarrow \cos \hat{B} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$

Considerando que $\overline{BD} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ e usando a lei dos co-senos para o Δ

ABD vem:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow \overline{AD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \frac{1}{5} = 34 - 6 = 28$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{7}\ cm$$

Observação:

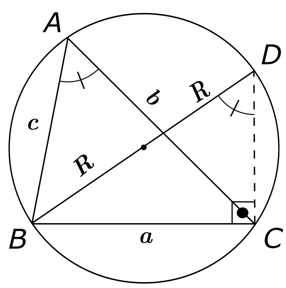
A lei dos co-senos permite determinar medianas, bissetrizes, alturas, projeções de um lado sobre o outro, etc.

Teorema: Lei dos senos

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Prova:

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c, inscrito em uma circunferência de raio R. Tracemos o diâmetro BD.



O triângulo BDC é retângulo em $\hat{C}$, já que $B\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ e $\overset{\frown}{BAD} = 180°$.

Temos que $\hat{D} = \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (ângulo inscrito).

Desse triângulo retângulo temos:

$$\operatorname{sen} \hat{D} = \frac{a}{2R}$$

Mas

$$\hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R$$

De maneira similar, temos que

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 2R \ \ e \ \ \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

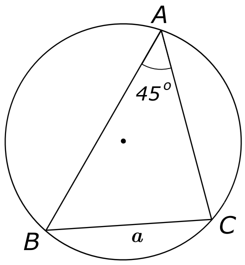
Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Exercícios Resolvidos

14. Em um círculo de raio 5 metros está inscrito um triângulo ABC no qual $\hat{A}$ mede 45°. Determine a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ desse triângulo.

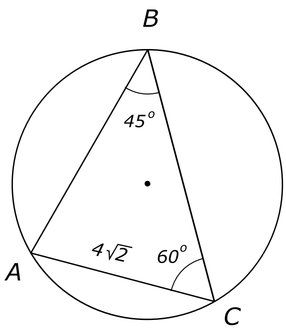
Solução:
Seja $\Delta\ ABC$ e considere o raio do círculo circunscrito ao triângulo de 5 metros e o ângulo $\hat{A} = 45°$. Seja a medida pedida a.



Pela lei dos senos temos:
$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}45°} = 2\cdot 5 \Rightarrow a = 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ *metros*.

15. Num triângulo ABC, tem-se: $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 60°$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$ metros. Calcule a medida do lado AB e o raio do círculo circunscrito.

Solução:
Seja o triângulo ABC e o círculo circunscrito a este triângulo.
$\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 60°$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$ metros.



Pela lei dos senos vem:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}45°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}60°} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{2\overline{AB}}{\sqrt{3}} = 2R$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3} \text{ e } R = 4$$

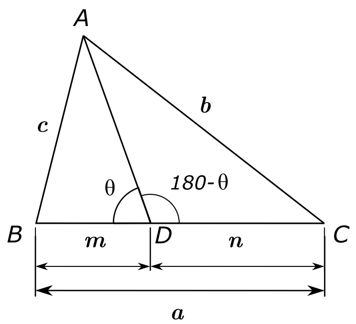
Daí, a medida do lado AB é $4\sqrt{3}$ metros, e o raio do círculo circunscrito é 4 metros.

Relação de Stewart

Seja o triângulo ABC de lados a, b e c. Trace um segmento AD interno ao triângulo, determinando sobre o lado BC os segmentos BD e CD de medidas m e n, respectivamente.
Vamos provar que:

$$\overline{AD}^2 \cdot a = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n - a \cdot m \cdot n$$

Esta relação é denominada *Relação de Stewart*.
Prova:
Considere a figura com os dados do teorema:



Aplicando a lei dos co-senos nos triângulos ABD e ACD, temos:

$$c^2 = \overline{AD}^2 + m^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot m \cdot \cos\theta \qquad (1)$$
$$b^2 = \overline{AD}^2 + n^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot n \cdot \cos(180^\circ - \theta) \qquad (2)$$

Multiplicando as relações (1) e (2) por n e m, respectivamente, vem:

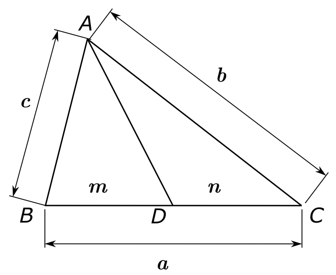
$$c^2 n = \overline{AD}^2 n + m^2 n - 2 \cdot \overline{AD} \cdot m \cdot n \cdot \cos\theta \qquad (3)$$
$$b^2 m = \overline{AD}^2 m + n^2 m + 2 \cdot \overline{AD} \cdot n \cdot m \cdot \cos\theta \qquad (4)$$

Somando membro a membro das relações (3) e (4), temos:

$b^2m + c^2n = \overline{AD}^2(m+n) + m \cdot n(m+n)$
$\Rightarrow b^2m + c^2n = \overline{AD}^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$
$\Rightarrow \overline{AD}^2 \cdot a = b^2m + c^2n - a \cdot m \cdot n$

Observação:
O segmento AD é chamado *ceviana*.
Ceviana é todo segmento que une o vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto.
Exemplo de ceviana: bissetriz interna, altura, mediana, etc.

Exercício 16: Dado um triângulo ABC de lados a, b e c, calcule as medidas das três medianas.
Solução:
Seja $\overline{AD}$ a mediana relativa ao lado BC.



Daí:
$m = n = \dfrac{a}{2}$ e $\overline{AD} = m_a$

Usando a relação de Stewart, vem:

$$m_a^2 \cdot a = b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$
$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2) \Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2}$$

De maneira similar, temos:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 - b^2}$$

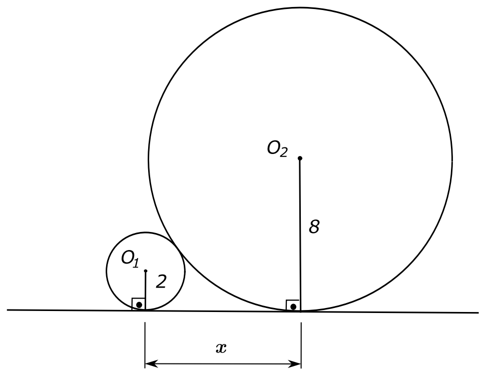
e

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - c^2}$$

Exercícios Propostos

1. No retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$, o segmento $\overline{DM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$. Determine a medida do segmento AM.

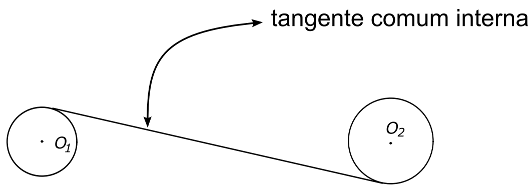
2. Determine o valor de x na figura a seguir:



3. Um ponto P dista 5 metros do centro de um círculo de raio de 13 metros. Calcule a medida da menor corda desse círculo que passa por P.

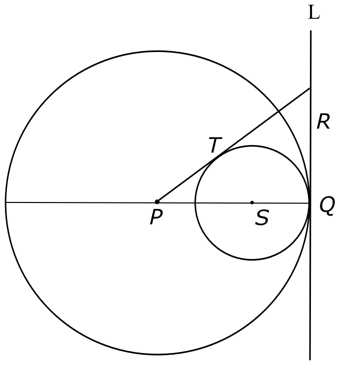
4. Dado um triângulo isósceles ABC em que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e $\overline{BC} = 12$ cm, calcule o raio do círculo inscrito no triângulo.

5. Os centros das duas circunferências a seguir estão separados de 41 metros. A menor circunferência tem raio igual a 4 metros e a maior, igual a 5 metros. Calcule o comprimento da tangente comum interna.

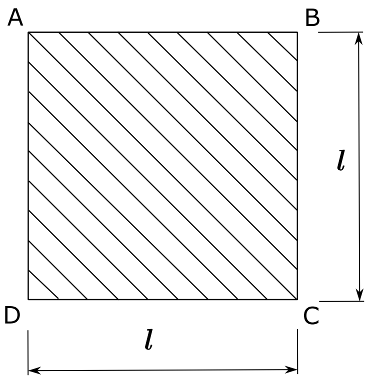


6. Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangentes entre si dois a dois. Sabendo que dois deles têm raio igual a 12 metros, calcule o raio do terceiro círculo.

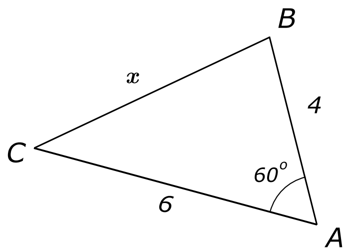
7. Na figura seguinte, as circunferências de centros P e S são ambas tangentes à reta L no mesmo ponto Q e a reta que passa por P e R tangencia a circunferência menor no ponto T. Calcule a medida do segmento QR sabendo que os raios das circunferências medem, respectivamente, 8 metros e 3 metros.



8. Um quadrado $ABCD$ de lado l tem cada um de seus lados divididos em 9 partes iguais. Ligando-se com segmentos de reta os pontos da divisão, segundo a diagonal AC, obtém-se o hachurado mostrado na figura. Calcule a soma dos comprimentos dos 17 segmentos assim obtidos.



9. No triângulo ABC da figura, calcule x.



10. Em um triângulo ABC, $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm e $\overline{BC} = 7$ cm. Calcule:

    a) a projeção do lado AC sobre o lado AB;

    b) a altura relativa ao lado AB.

11. Determine a medida do lado BC de um triângulo ABC, onde $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 6$ cm e a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$ vale $10,4$ cm.

12. Sabendo que dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 4 cm e 5 cm, respectivamente, e uma das diagonais 6 cm, calcule a medida da outra diagonal.

13. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 metros e 12 metros e formam um ângulo de 60°. Calcule as diagonais.

14. Num triângulo ABC, temos $\overline{AC} = 3$ metros, $\overline{BC} = 4$ metros e $\alpha = B\hat{A}C$. Se $\overline{AB} = 3$ metros, calcule $\cos\alpha$.

15. Num triângulo ABC, as medidas dos lados BC e AC medem 5 metros e 6 metros, respectivamente, e o seno do ângulo $\hat{A}$ vale 0,6. Calcule o seno do ângulo $\hat{B}$.

16. Calcular as alturas de um triângulo cujos lados medem 6 metros, 10 metros e 12 metros.

17. Mostre que, em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das três medianas é igual a três vezes a metade do quadrado da hipotenusa.

18. Em um triângulo ABC, os lados medem a, b e c. Calcule a medidas das três alturas.

Gabarito

1. $\dfrac{9}{5}$.
2. 8.
3. 24 metros.
4. O raio é 3 cm.
5. 40 metros.
6. 3 metros.
7. $\overline{QR} = 6$ metros.
8. $9\sqrt{2}\,l$.
9. $2\sqrt{7}$.
10. a) $\dfrac{5}{2}$ cm, b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

11. $\overline{BC} = 12$ cm.

12. $\sqrt{46}$ cm.

13. $4\sqrt{7}$ metros e $4\sqrt{19}$ metros.

14. $\dfrac{1}{9}$.

15. 0,72.

16. $\dfrac{8\sqrt{14}}{3}$ metros, $\dfrac{8\sqrt{14}}{5}$ metros e $\dfrac{4\sqrt{14}}{3}$ metros.

17. Demonstração.

18.
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{e}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

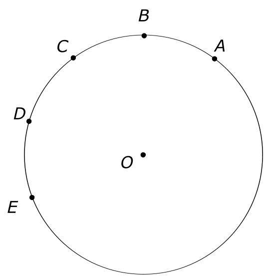
onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, p semiperímetro.

Aula 11 – Polígonos Regulares

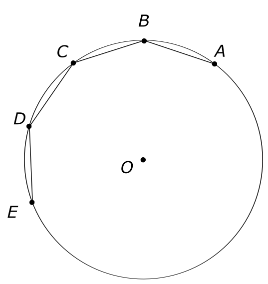
Na Aula 3, em que apresentamos os polígonos convexos, vimos que um polígono regular é um polígono convexo tal que:
a) todos os lados são congruentes entre si;
b) todos os ângulos são congruentes entre si.
Assim, o triângulo equilátero é o triângulo regular e o quadrado é o quadrilátero regular.
Um polígono regular é equilátero e equiângulo.

Teorema Fundamental

Dividindo-se uma circunferência em $n\,(n \geq 3)$ arcos congruentes entre si, então:
a) as cordas que unem os pontos de divisão consecutivos formam um polígono regular inscrito, com n lados.
b) as tangentes traçadas pelos pontos da divisão determinam um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência.
Prova:
Seja uma circunferência dividida em $n\,(n \geq 3)$ arcos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, $\ldots$



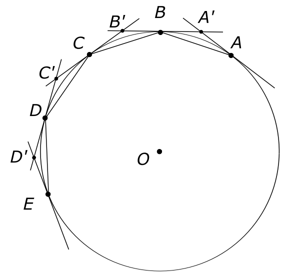
a) Temos que: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{DE} \equiv\ \cdots$ e vamos provar que o polígono $ABCDE\cdots$ é regular.



Os lados desse polígono são congruentes entre si, pois em um mesmo círculo cordas que subentendem arcos congruentes são congruentes.

Os ângulos desse polígono são congruentes entre si, já que são ângulos inscritos de mesma medida e todos medem $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, n é o número de lados desse polígono.
Daí, o polígono $ABCDE\cdots$ é regular.

b) Temos que *A'B'*, *B'C'*, *C'D'*, *D'E'*,... são segmentos tangentes à circunferência nos pontos *B*, *C*, *D*, *E*, ..., *A*.



Vamos provar que *A'*, *B'*, *C'*, *D'*,... é regular.
Os triângulos isósceles *AA'B*, *BB'C*, *CC'D*, *DD'E*,... são congruentes entre si pelo caso *ALA*, já que têm congruentes os lados *AB*, *BC*, *CD*, *DE*,... e o ângulos adjacentes a esses lados, pois são ângulos de segmento de mesma medida.
Da congruência desses triângulos, vem que:

$$\hat{A}' \equiv \hat{B}' \equiv \hat{C}' \equiv \hat{D}' \equiv \cdots \text{ e } AA' \equiv A'B \equiv BB' \equiv B'C \equiv CC' \equiv C'D \equiv \cdots$$

somando por exemplo:

$$A'B + BB' \equiv B'C + CC' \Rightarrow A'B' \equiv B'C'$$

Logo,

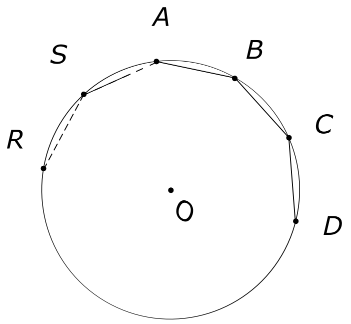
$$A'B' \equiv B'C'$$

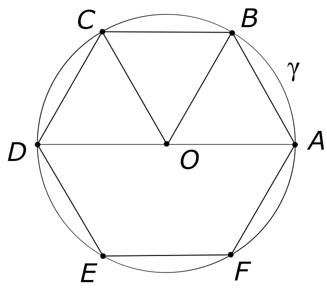
De maneira similar temos que

$$A'B' \equiv B'C' \equiv C'D' \equiv \cdots$$

Daí, o polígono *A'B'C'D'*... é regular.

Propriedade 1: Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.
Prova:
Seja $ABCD \cdots RS$ o polígono regular (vamos tomar o hexágono *ABCDEF* por exemplo).





Pelos pontos A, B e C tracemos a circunferência γ e seja O o seu centro. Provemos que γ passa pelos demais vértices do polígono.
Vamos provar que $D \in \gamma$.

Sejam os triângulos OBA e OCD.
Temos que: $\Delta\ OBA \equiv \Delta\ OCD$ pois

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \text{(lado do polígono regular)} \\ \overline{OB} = \overline{OC} \text{(raios da circunferência)} \\ O\hat{B}A = O\hat{C}D \end{array}\right. \quad \underset{LAL}{\Longrightarrow}$$

pois, como no triângulo isósceles BOC, $O\hat{C}B \equiv O\hat{B}C$ e que $D\hat{C}B \equiv A\hat{B}C$, vem que $O\hat{B}A \equiv O\hat{C}D$, então

$$\overline{OA} = \overline{OD} \Rightarrow D \in \gamma.$$

De maneira similar, provamos que $E \in \gamma$, $F \in \gamma, \cdots$

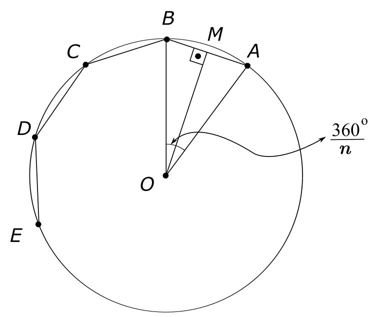
Da unicidade da circunferência que passa por A, B, e C, sai a unicidade de γ por A, B, C, D, $\cdots$ R, S.

Daí, todo polígono regular é inscritível a uma circunferência.

Propriedade 2: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência. Verificar!!!

Nota:
1) As duas últimas propriedades são recíprocas do Teorema Fundamental.
2) As circunferências inscrita e circunscrita a um polígono regular são concêntricas.

Elementos de um polígono regular



1. *Centro* de um polígono regular é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita.
   Na figura, O é o centro do polígono regular $ABCDE\ldots$.

2. *Raio* de um polígono regular é o raio da circunferência circunscrita.
   Na figura, OA é um raio do polígono regular $ABCDE\ldots$.

3. *Apótema* é o segmento cujos extremos são o centro do polígono regular e o ponto médio de um lado.
   Na figura, OM é um apótema do polígono regular $ABCDE\ldots$.
   O apótema é congruente com o raio da circunferência inscrita.

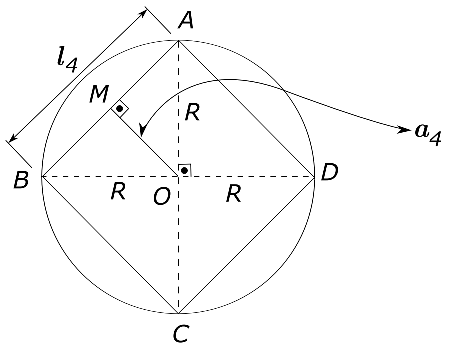
4. *Ângulo cêntrico* de um polígono regular é o ângulo formado por dois raios consecutivos.
   Na figura, $A\hat{O}B$ é um ângulo cêntrico de um polígono regular de n lados cujo valor é $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Relações métricas

Cálculo do lado e do apótema dos polígonos regulares em função do raio do círculo circunscrito a estes polígonos.
Vamos denotar que para um polígono regular de n lados:
l_n - medida do lado.
a_n - medida do apótema.

Quadrado

a) Construção:
Inscrever um quadrado em um círculo de raio R; traçam-se dois diâmetros perpendiculares AC e BD. A circunferência fica dividida em quatro arcos congruentes, por corresponderem a ângulos centrais congruentes, e o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado inscrito.



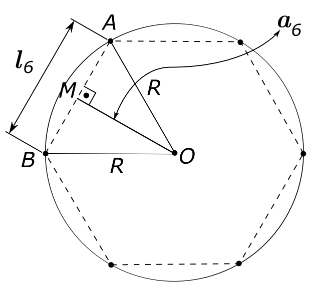
b) Cálculo do lado em função de R:
No triângulo retângulo isósceles AOB, temos:

$$l_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow l_4 = R\sqrt{2}.$$

c) Cálculo do apótema em função de R:
O apótema $\overline{OM}$ sendo altura do triângulo retângulo AOB relativo à hipotenusa AB é também mediana.

$$\Rightarrow a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono regular



a) Cálculo do lado em função de R:
Considere AB o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

$$m(A\hat{O}B) = \frac{360°}{6} = 60°$$

O triângulo AOB é isósceles $\Rightarrow m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Daí, $\Delta\ AOB$ é equilátero $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = R$

Logo,

$$l_6 = R$$

b) Cálculo do apótema em função de R:

$\Delta\ AMO$ retângulo $\Rightarrow a_6^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = R^2$

$\Rightarrow a_6^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

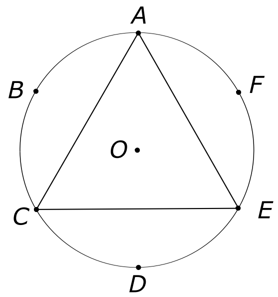
c) Construção:

Inscrever um hexágono regular em uma circunferência de raio R; é suficiente marcar consecutivamente, a partir de um ponto A da circunferência, com a abertura do compasso igual ao raio, os arcos AB, BC, $\cdots$ e traçar as correspondentes cordas.

Triângulo equilátero

a) Construção:

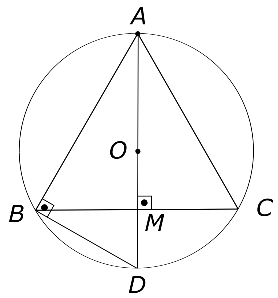
Dividir a circunferência em 6 partes congruentes, a partir de um ponto A qualquer, obtendo-se B, C, D, E e F.



Ligar os pontos A com C, C com E e E com A obtendo o $\Delta\ ACE$, que é equilátero.

Note que $\overset{\frown}{ABC} \equiv \overset{\frown}{CDE} \equiv \overset{\frown}{EFA} =\ 120°$.

b) Cálculo do lado em função de R:
Seja ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R.

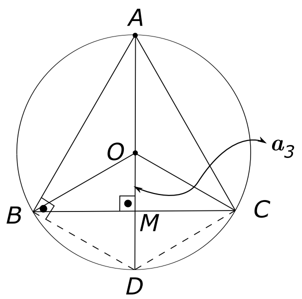


Trace o diâmetro AD, observe que $\overset{\frown}{BD} = 60° \Rightarrow \overline{BD} = l_6 = R$

Δ ABD retângulo $\Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$

$$\Rightarrow l_3^2 + R^2 = (2R)^2 \Rightarrow l_3^2 = 3R^2 \Rightarrow l_3 = R\sqrt{3}$$

c) Cálculo do apótema em função de R:



O quadrilátero $BDCO$ é um losango $\Rightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{OD}}{2}$

Daí,

$$a_3 = \frac{R}{2}.$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule a medida do ângulo cêntrico de um decágono.

Solução:
Temos que o ângulo cêntrico é:

$$\frac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \frac{360°}{10} = 36°.$$

2. Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito em um círculo de raio 10 cm.

Solução:
Temos que $l_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 10\sqrt{2}$ cm.

3. Calcule o lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo, sabendo que o lado do hexágono inscrito nesse círculo mede $5\sqrt{6}$ cm.

Solução:
Temos que $l_3 = R\sqrt{3} \quad \text{e} \quad l_6 = 5\sqrt{6}$.
Mas

$$\begin{aligned} l_6 = R \quad &\Rightarrow l_3 = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \\ &\Rightarrow l_3 = 5\sqrt{18} = 5 \cdot 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \\ &\Rightarrow l_3 = 15\sqrt{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

4. Calcule o perímetro de um triângulo inscrito em um círculo, sabendo que o apótema do quadrado inscrito nesse círculo mede $3\sqrt{5}$ cm.

Solução:
Temos

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{5} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10}.$$

Como

$$l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow l_3 = 3\sqrt{10}\sqrt{3} \Rightarrow l_3 = 3\sqrt{30}.$$

Logo, o perímetro pedido é: $3l_3 = 3 \cdot 3\sqrt{30} = 9\sqrt{30}$.

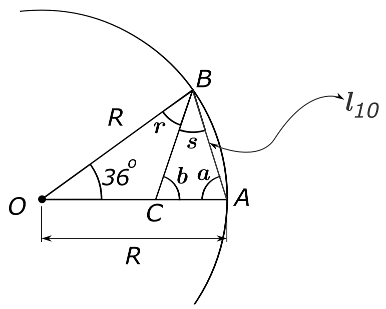
5. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio R.

Solução:
Temos que

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Decágono regular

a) Cálculo do lado em função do raio:
Seja AB o lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.



O ângulo central $A\hat{O}B$ é tal que:

$$m(A\hat{O}B) = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

No triângulo isósceles $A\hat{O}B$, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de medidas a e $(r + s)$ valem cada um $\dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.
Traçando a bissetriz BC do ângulo $\hat{B}$, temos

$$r = s = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

então o triângulo OBC é isósceles e $\overline{OC} = \overline{BC}$.
No $\Delta\ ABC$ temos que $b = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$
$\Rightarrow \Delta\ ABC$ é isósceles $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OC} = l_{10}$
Usando o Teorema da bissetriz interna

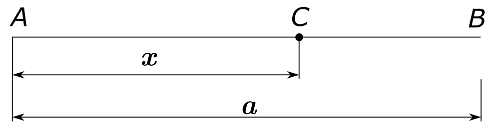
$$\Rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

$$\Rightarrow l_{10}^2 = R^2 - R \cdot l_{10} \Rightarrow l_{10} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{R}{2}$$

Segmento áureo
Definição: Seja um segmento AB e C um ponto de AB, tal que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (1).$$

O segmento AC, cuja medida satisfaz a relação (1) é o segmento áureo do segmento AB.



Considerando $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$ e substituindo em (1) vem:

$$x^2 = a(a-x) \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4a^2}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-a+a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \\ \\ \dfrac{-a-a\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(Não serve)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \overline{AC} = (\sqrt{5}-1)\frac{a}{2}$$

Observação:

Note que o segmento de medida $(\sqrt{5}-1)\dfrac{R}{2}$ é o segmento áureo do raio.

b) Construção de um segmento áureo

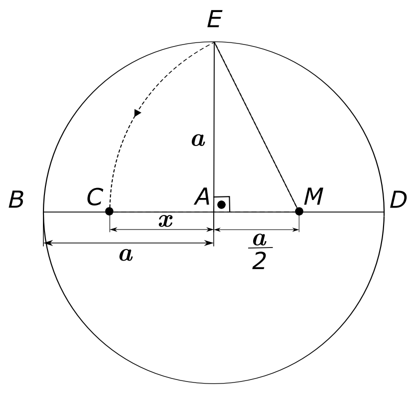
1) Trace uma circunferência de centro A e raio a.

2) Trace o diâmetro BD e o raio AE perpendiculares.

3) Considere o ponto médio M de AD.

4) Transporte ME sobre o diâmetro BD, achando o ponto C.

5) Ache AC, que é o segmento procurado.



$$\overline{ME}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\overline{ME} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Justificativa:

$\Delta\ EAM$ é retângulo.

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Daí,

$$\overline{AC} = \overline{MC} - \overline{MA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = (\sqrt{5}-1)\frac{a}{2}$$

De forma similar, como

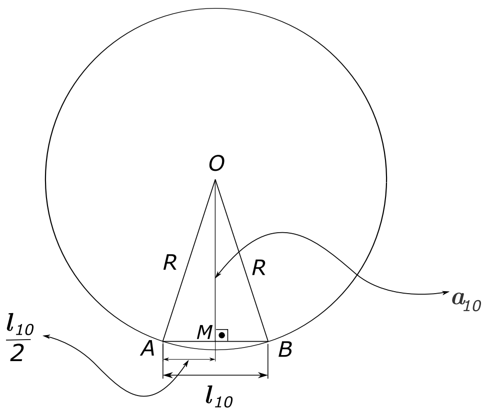
$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

construímos o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

c) Cálculo do apótema em função de R:

No $\Delta\ AMO$ retângulo temos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AM}^2$$



onde:

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= a_{10} \\ \overline{AO} &= R \quad \text{e} \\ \overline{AM} &= \frac{l_{10}}{2} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1) \end{aligned}$$

Daí,

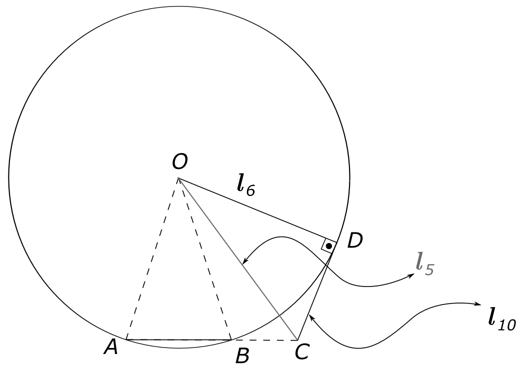
$$a_{10}^2 = R^2 - \left(\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)\right)^2 \Rightarrow a_{10}^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(5+1-2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow a_{10}^2 = \frac{16R^2 - R^2(6-2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow a_{10}^2 = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16}$$

$$\Rightarrow a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Pentágono

a) Cálculo do lado em função do raio:
Considere AB o lado do decágono regular.



Prolongue AB, de modo que $\overline{AC} = \overline{AO} = R$.
Trace OC; o segmento OC é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência de raio $\overline{AO} = \overline{AC} = R$, porque o ângulo $C\hat{A}O$ mede 72°.
Pelo ponto C, trace a tangente CD à circunferência.
Por propriedade de relações métricas no círculo temos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} \quad (1)$$

Mas AB é segmento áureo do raio $\overline{AC} = R$, então

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} \quad (2).$$

De (1) e (2) vem que:

$$\overline{CD} = \overline{AB}.$$

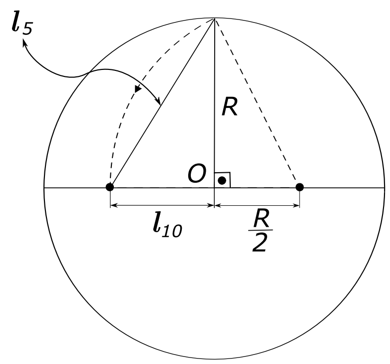
Daí,

$$\overline{CD} = l_{10}.$$

Portanto, o triângulo OCD tem por hipotenusa o lado do pentágono regular e por catetos os lados do hexágono regular e do decágono regular, ou seja:

$$l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2 \Rightarrow l_5^2 = R^2 + \left((\sqrt{5}-1)\frac{R}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow l_5^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(5+1-2\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow l_5^2 = \frac{R^2}{4}(4+6-2\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

b) Construção:



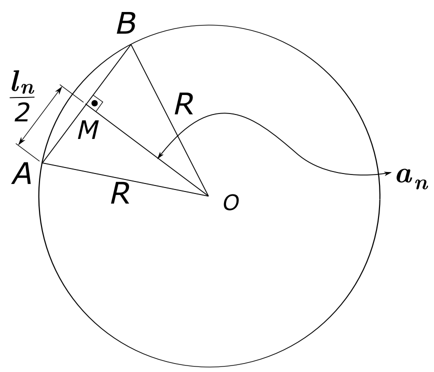
1) Construir o l_{10}.

2) Construir um triângulo retângulo de catores R e l_{10}.

3) A hipotenusa desse triângulo é o l_5.

Expressão geral do apótema de um polígono regular

Seja AB o lado de medida l_n de um polígono regular de n lados. Seja OM o apótema desse polígono de medida a_n e R o raio da circunferência circunscrita.



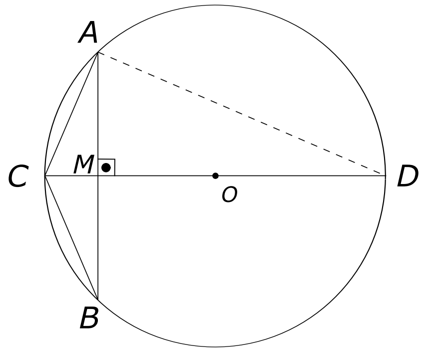
Do $\Delta\ AOM$ temos:

$$R^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow a_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{\frac{4R^2 - l_n^2}{4}} \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$$

Expressão geral do lado de um polígono regular de $2n$ lados em função do de n lados

Seja AB o lado de medida l_n de um polígono regular de n lados. Trace o diâmetro CD perpendicular à corda AB.



O ponto C divide o arco AB em dois arcos congruentes e daí AC será o lado do polígono de $2n$ lados, cuja medida vamos denotar por l_{2n}.
Do triângulo retângulo CAD vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CM} \qquad (1).$$

Mas

$$\overline{CM} = R - \overline{OM}, \quad \overline{CD} = 2R, \quad \overline{AC} = l_{2n}$$

e

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2} \text{ (apótema do polígono de } n \text{ lados).}$$

Substituindo estes valores em (1) vem:

$$l_{2n}^2 = 2R\left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}\right)$$

$$l_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

Exercícios Resolvidos

6. Calcule a medida do lado de um dodecágono regular em função do raio R da circunferência circunscrita.

Solução:
Temos que:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2}}.$$

Mas $l_6 = R$, então

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{R^2(2-\sqrt{3})} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

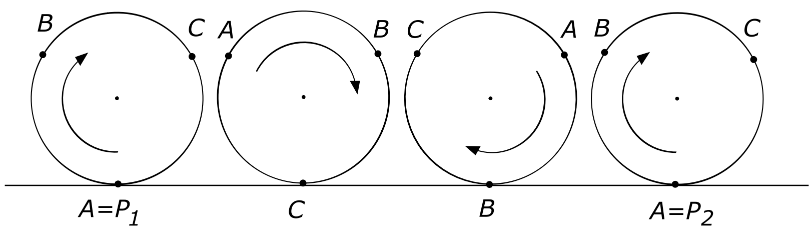
Logo, $l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Comprimento de uma circunferência

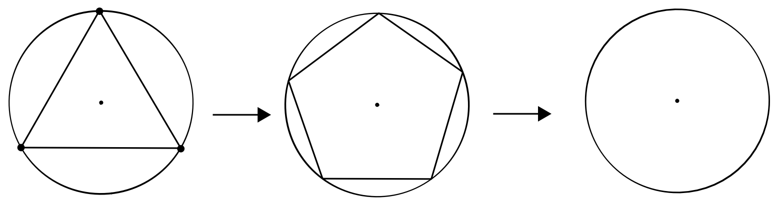
Segmento retificante da circunferência

Retificar uma circunferência é determinar um segmento, denominado *segmento retificante da circunferência*, cujo comprimento seja o comprimento da circunferência.

A figura seguinte mostra que $\overline{P_1P_2}$ é o segmento retificante da circunferência.



Seja um polígono regular inscrito em uma circunferência. Se dobrarmos o número de lados desse polígono, basta tomar os pontos médios dos arcos correspondentes para obter um novo polígono regular cujo perímetro tem medida maior que o polígono anterior. Se dobrarmos sucessivamente e indefinidamente o número de lados desse polígono, teremos o perímetro de um polígono que se aproxima do comprimento da circunferência circunscrita.

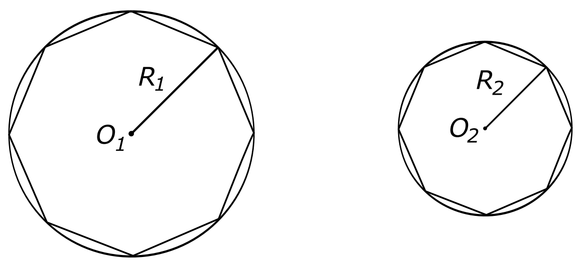


Definição: *Comprimento de uma circunferência* é o número para que tendem os perímetros dos polígonos inscritos nessa circunferência quando o número de lados aumenta indefinidamente.

Teorema: A razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e a medida do diâmetro é constante.

Prova:

Considere duas circunferências de raios R_1 e R_2 e comprimentos C_1 e C_2, respectivamente, e suponha os polígonos regulares de n lados, inscritos nessa circunferência.



Temos que os polígonos regulares inscritos são semelhantes e daí,

$$\frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

onde P_n^1 e P_n^2 são os respectivos perímetros.

Fazendo o número de lados crescer indefinidamente, as medidas dos perímetros P_n^1 e P_n^2 vão tender para C_1 e C_2 que são os comprimentos das circunferências.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$$

Logo,

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}.$$

Exercícios Resolvidos

7. Determine o valor de 1 radiano em graus.

Solução:
Temos que:

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & - & 180^\circ \\ 1 \text{ rad} & - & \alpha \end{array} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot 1}{\pi} \approxeq 57^\circ 17' \text{ se } \pi \approxeq 3,1415.$$

8. Se o raio de uma circunferência aumenta 1 metro, quanto aumenta o seu comprimento?

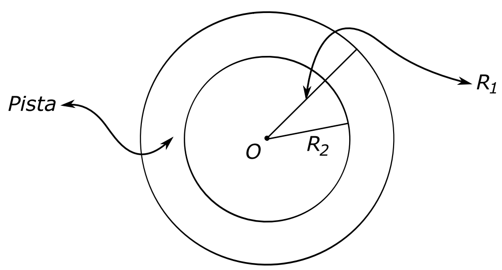
Solução:
Seja a circunferência de raio $R \Rightarrow$ o comprimento $C = 2\pi R$.
Aumentando R de 1 metro, vem: $R + 1 \Rightarrow$ o novo comprimento é:

$$C' = 2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi = C + 2\pi$$

O comprimento aumenta 2π metros.

9. Uma pista circular foi construída por duas circunferências concêntricas, cujos comprimentos são de 1.500 metros e 1.000 metros aproximadamente. Quanto mede sua largura?

Solução:



Temos que:
$1.500 = 2\pi R_1 \Rightarrow R_1 = \dfrac{750}{\pi}$

$1.000 = 2\pi R_2 \Rightarrow R_2 = \dfrac{500}{\pi}$.

A largura da pista circular é:

$R_1 - R_2 = \dfrac{750}{\pi} - \dfrac{500}{\pi} = \dfrac{250}{\pi}$ metros.

Nota:
A razão constante do comprimento da circunferência para a medida do diâmetro é representada por π.
Assim,

$$\frac{C}{2R} = \pi \qquad (1)$$

Expressão do comprimento de uma circunferência

De (1) vem que

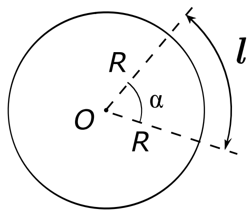
$$C = 2\pi R$$

onde C é o comprimento da circunferência e R é o raio da circunferência.

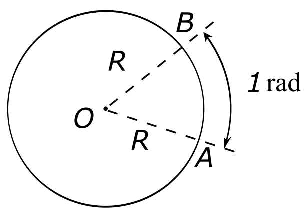
Comprimento de um arco de circunferência

O comprimento de um arco de circunferência, que vamos denotar por l, é proporcional à sua medida (α).
Seja α em graus:

$$\begin{array}{lcl} 360^\circ & - & 2\pi R \\ \alpha & - & l \end{array} \Rightarrow l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$



Definição: Denomina-se 1 radiano todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



Temos que:

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ rad} & \rightleftharpoons & \overset{\frown}{AB} = R, \quad \overset{\frown}{AB} = l_1 \rightarrow \text{ comprimento do arco AB.} \\ 2 \text{ rad} & \rightarrow & l_2 = 2R, \quad l_2 \rightarrow \text{ comprimento do arco para 2 rd} \\ \vdots & & \\ \alpha \text{ rad} & \rightarrow & l = \alpha R \end{array}$$

ou seja,
$l = \alpha R \quad (1)$,
onde
$l \to$ comprimento do arco AB.
$\alpha \to$ ângulo em radianos.
$R \to$ raio.
Daí, como o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$, usando (1) vem:

$$2\pi R = \alpha R \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

daí, o ângulo de 1 volta é 2π.

Exercícios Resolvidos

10. Calcule o comprimento de um arco de 36° em uma circunferência de raio 5 cm.

Solução:
Temos que:

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180},$$

onde
$R \to$ raio $= 5$ cm.
$\alpha = 36°$.
$l \to$ comprimento do arco.

$$l = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 36}{180} = \pi.$$

Daí, o comprimento é π cm.

11. Qual a razão entre o comprimento de uma circunferência e o perímetro de um triângulo equilátero inscrito?

Solução:
O comprimento da circunferência é $2\pi R$, onde R é o raio.
O lado do triângulo equilátero inscrito no círculo é:

$$l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow \quad \text{o perímetro do triângulo é } 3R\sqrt{3}.$$

Daí, a razão pedida é:

$$\frac{2\pi R}{3R\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exercícios Propostos

1. Qual o polígono regular cujo ângulo cêntrico mede 24°?

2. Calcule o lado de um quadrado inscrito em um círculo de raio igual a $2\sqrt{5}$ cm.

3. A altura de um triângulo equilátero inscrito mede 10 cm. Calcule o lado do hexágono regular inscrito nesse mesmo círculo.

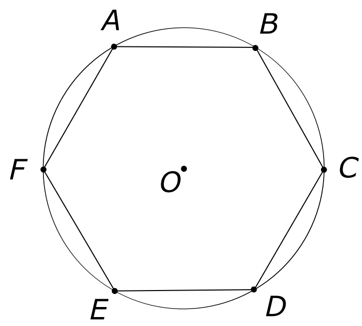
4. Qual a razão entre os lados de dois triângulos equiláteros, um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência?

5. No hexágono regular $ABCDEF$ da figura, o lado mede $\sqrt{2}$ cm. Calcular:

   a) o apótema;

   b) o raio do círculo inscrito;

   c) a diagonal AC.



6. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio r.

7. Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 metros. Determine o número de voltas completas que ele deve dar.

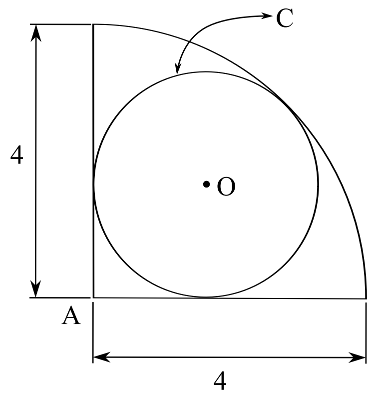
8. Calcule o comprimento de uma circunferência, sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito neste círculo é $3\sqrt{2}$ cm.

9. Em uma circunferência, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad tem comprimento de 4 cm. Calcule a medida do raio dessa circunferência.

10. Um triângulo inscrito em uma circunferência de raio 10 cm determina neste três arcos cujos comprimentos são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Determine os ângulos desse triângulo.

11. Um trator tem as rodas da frente com $0,60$ metros de diâmetro e as traseiras com o dobro desse diâmetro. Qual a distância percorrida pelo trator se as rodas da frente deram 2000 voltas a mais que as traseiras?

12. Calcule o comprimento da circunferência C da figura abaixo.



13. Determinar a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em um círculo de raio R e o perímetro do quadrado circunscrito a esse mesmo círculo.

14. O ponto mais baixo de uma roda gigante circular de raio R metros dista 1 metro do solo. A roda está girando com três crianças que estão, duas a duas, à mesma distância. Determine a altura de duas delas, no momento em que a outra está no ponto mais alto.

Gabarito

1. Pentadecágono.

2. $2\sqrt{10}$ cm.

3. $\dfrac{20}{3}$ cm.

4. $\dfrac{1}{2}$.

5. a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm, b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm, c) $\sqrt{6}$ cm.

6. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

7. 398.

8. $12\pi\sqrt{2}$ cm.

9. $\dfrac{24}{\pi}$ cm.

10. $45°$, $60°$ e $75°$.

11. 2400π metros.

12. $8\pi(\sqrt{2} - 1)$.

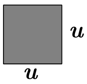
13. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\dfrac{2 + R}{2}$.

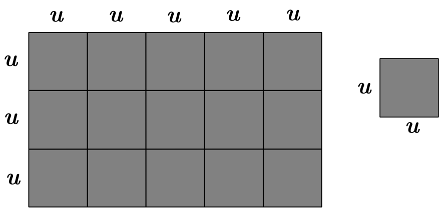
Aula 12 – Áreas de Superfícies Planas

Superfície de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior. A figura mostra uma superfície retangular.

Área de uma superfície é um número real positivo a essa superfície. A área expressa a medida de uma superfície numa certa unidade. Vamos considerar como unidade a superfície de um quadrado de lado u.



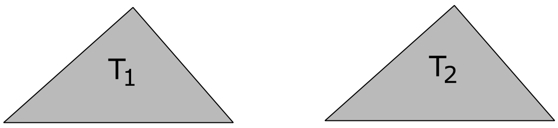
Seja o retângulo de dimensão $5u$ e $3u$.



A área dessa superfície é igual a 15.

Superfícies congruentes

As superfícies de duas figuras congruentes são denominadas congruentes se têm a mesma área.
Na figura, os triângulos são congruentes e daí, área $_{T_1}$ = área $_{T_2}$.



Superfícies equivalentes

Duas superfícies são denominadas equivalentes se têm a mesma área.
Assim, as superfícies das figuras 1 e 2 são equivalentes.

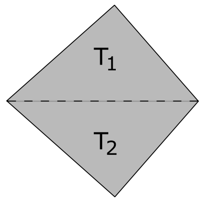


figura 1

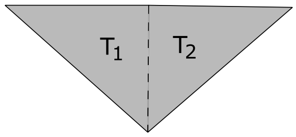


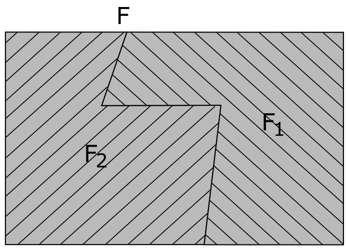
figura 2

$$\left\{\begin{array}{l} \text{área}_{\textit{figura 1}} = \text{área}_{\ T_1} + \text{área}_{\ T_2} \\ \\ \text{área}_{\textit{figura 2}} = \text{área}_{\ T_1} + \text{área}_{\ T_2} \end{array}\right. \Rightarrow \text{área}_{\textit{figura 1}} = \text{área}_{\textit{figura 2}}$$

Vamos precisar de dois postulados para o estudo de áreas de superfícies planas.

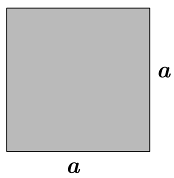
1) Postulado da adição de áreas

Se a superfície de uma figura plana F é a reunião das superfícies das figuras F_1 e F_2 sem pontos interiores comuns, então área$_F$ = área$_{F_1}$ + área$_{F_2}$.
Na figura, a superfície F é a reunião das superfícies F_1 e F_2.



2) Postulado da unidade de áreas

A área da superfície de um quadrado é o quadrado da medida do lado.
Na figura, o quadrado de lado a tem área a^2.



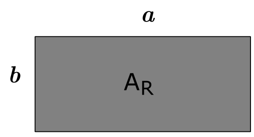
Observações:

1) Quando nos referirmos à área de um quadrado, de um triângulo, etc., estamos nos referindo à área da respectiva superfície.

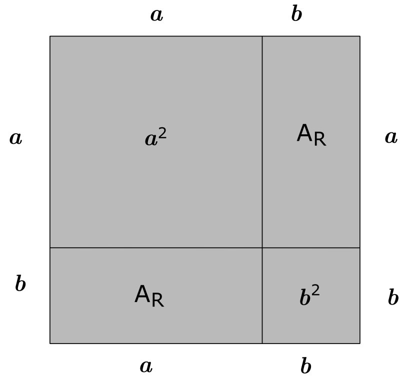
2) Em um retângulo, dois lados adjacentes constituem a base e a altura e são denominados dimensões do retângulo.

Área de um retângulo

Teorema 1: A área de um retângulo é o produto da base pela sua altura.
Prova:
Considere um retângulo de base a, altura b e área A_R.



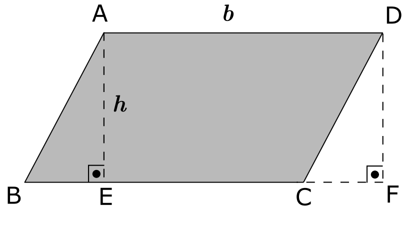
Vamos considerar os quadrados de lados a, b e $a+b$.



Temos pelos postulados de áreas que:

$$\begin{aligned} & a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a+b)^2 \\ \Rightarrow\ & a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow\ & A_R = ab \end{aligned}$$

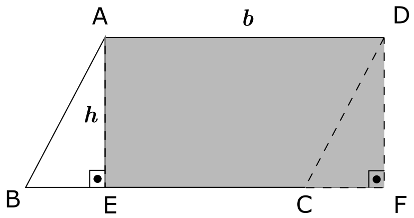
Teorema 2: Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.
Prova:
Seja o paralelogramo $ABCD$ da figura.



Trace pelos vértices A e D as perpendiculares AE e DF à reta suporte do lado BC.
Vamos provar que $\Delta\ ABE \equiv \Delta\ DCF$.
De fato,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{CD} & \text{(lados opostos de um paralelogramo)} \\ \overline{AE} = \overline{DF} & \text{(altura do paralelogramo)} \end{array} \right. \quad \text{Caso Especial}$$

então a área do paralelogramo $ABCD$ é equivalente à área do retângulo $AEFD$, já que as áreas são iguais.



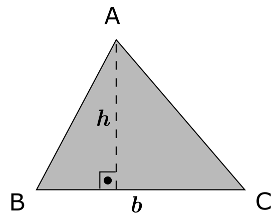
Conseqüências: Denotando por b e h as medidas da base e altura comuns, vem:

$$\begin{array}{l} A_P = A_R \\ A_R = b \cdot h \quad \text{(Teorema 1)} \end{array} \Rightarrow A_P = b \cdot h$$

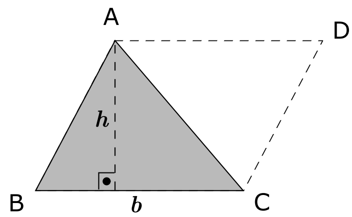
Logo:
A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Área de um triângulo

Teorema 3: A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.
Prova:
Considere o triângulo ABC de base b e altura h.



Trace AD e CD, respectivamente, paralelas aos lados BC e AB, daí temos o paralelogramo $ABCD$.



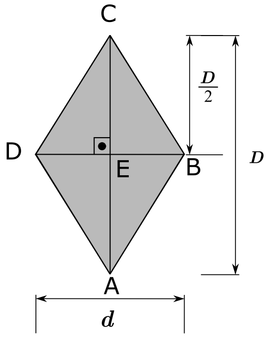
Temos que $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ CDA$, pois

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \\ AC \quad \text{comum} \end{array} \right. \quad (LLL) \Rightarrow A_T = \frac{A_P}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

já que $\text{A}_{\Delta ABC} = \text{A}_{\Delta CDA}$

Área de um losango

Teorema 4: A área de um losango é igual à metade do produto das diagonais.
Prova:
Seja o losango $ABCD$ de centro E cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, D e d.

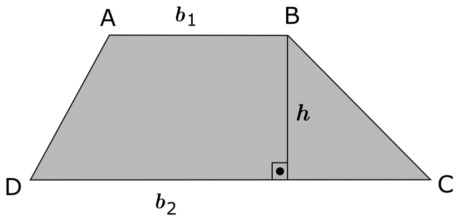


A diagonal BD divide o losango em dois triângulos ABD e CDB.
Pelo postulado de adição de áreas vem:

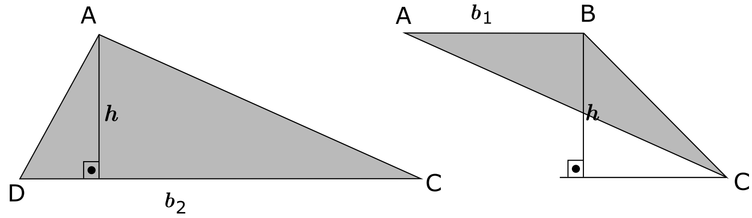
$$\begin{aligned} & A_L = A_{\Delta ABD} + A_{\Delta CDB} = \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \\ \Rightarrow\ & A_L = \frac{Dd}{4} + \frac{Dd}{4} = \frac{Dd}{2} \\ \Rightarrow\ & A_L = \frac{Dd}{2} \end{aligned}$$

Área de um trapézio

Teorema 5: A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.
Prova:
Seja o trapézio $ABCD$ de bases b_1 e b_2 e altura h.



Podemos dividir este trapézio em dois triângulos que são: $\Delta\ ADC$ e $\Delta\ ABC$ de mesma altura h.



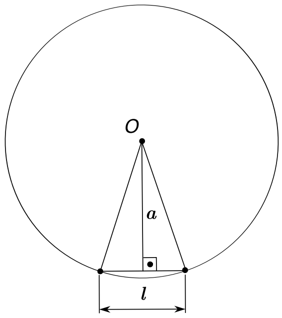
então

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{b_2 \cdot h}{2} + \frac{b_1 \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{Trapézio}} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

Área de um polígono regular

Teorema 6: A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Prova:



Considere o polígono regular sendo:
$n \to$ número de lados,
$a \to$ medida do apótema
$l \to$ medida do lado e
$p \to$ semiperímetro.

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura a, então

$$A_{Polígono} = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

Como $nl = 2p$ (perímetro), então

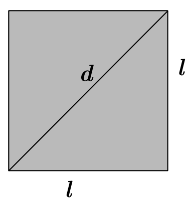
$$A_{Polígono} = \frac{2pa}{2} \Rightarrow A_{Polígono} = pa$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine a área de um quadrado em função da sua diagonal d.

Solução:

Seja o quadrado de diagonal d.



Temos que a área de um quadrado é:

$$A_{\text{quadrado}} = l^2$$

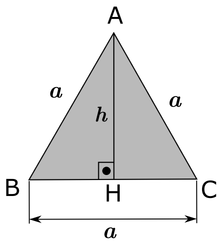
$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{d^2}{2}$$

Logo,

$$A_{\text{quadrado}} = \frac{d^2}{2}$$

2. Determine a área de um triângulo equilátero de lado a.

Solução:
Seja um triângulo equilátero ABC de lado a e altura h.



No Δ AHC temos:

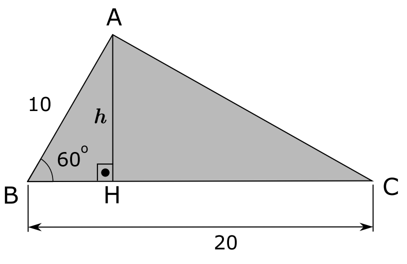
$$\begin{aligned} & h^2 + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 \\ \Rightarrow \quad & h^2 = a^2 - \tfrac{a^2}{4} = \tfrac{3a^2}{4} \\ \Rightarrow \quad & h = \tfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Logo, a área pedida é:

$$A_T = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 20 cm e formam um ângulo de 60°. Calcule a área desse triângulo.

Solução:
Seja ABC o triângulo da figura, onde $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm e $\overline{AH} = h$.



Temos que

$$A_{\Delta ABC} = \frac{20h}{2} = 10h \qquad (1)$$

No Δ AHB

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{3} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

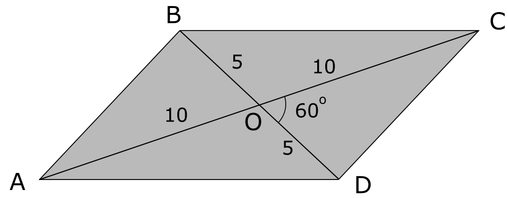
$$A = 10 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow A = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Observação:
Se dois lados de um triângulo medem a e b e formam um ângulo α, então a área desse triângulo é:

$$A = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

4. As diagonais de um paralelogramo medem 10 metros e 20 metros e formam um ângulo de 60°. Achar a área do paralelogramo.

Solução:
Seja um paralelogramo com diagonais que medem 10 metros e 20 metros e formam um ângulo de 60°. As diagonais se cortam ao meio.



Temos que

$$A_{Paralelogramo} = A_{\Delta OCB} + A_{\Delta OAB} + A_{\Delta OCD} + A_{\Delta OAD}$$
$$A_{Paralelogramo} = \frac{5 \cdot 10 \operatorname{sen} 120°}{2} + \frac{5 \cdot 10 \operatorname{sen} 60°}{2} + \frac{5 \cdot 10 \operatorname{sen} 60°}{2} + \frac{5 \cdot 10 \operatorname{sen} 120°}{2}$$

Como $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vem:

$$A_{Paralelogramo} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

5. Um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular tem o mesmo perímetro que é 120 cm. Determinar a razão entre a soma das áreas do triângulo equilátero e do quadrado para a área do hexágono regular.

Solução:
O triângulo equilátero tem perímetro 120 cm, então o lado desse triângulo é $\frac{120}{3}$ cm = 40 cm, pelo Exercício 2, a área desse triângulo é

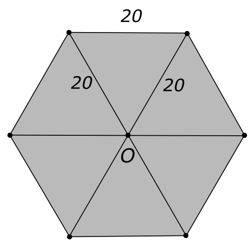
$$S_1 = \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 400\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

O quadrado tem perímetro 120 cm, então o lado desse quadrado é $\frac{120}{4}$ cm = 30 cm, temos que a área do quadrado é:

$$S_2 = 30^2 = 900 \text{ cm}^2$$

O hexágono regular tem perímetro 120 cm, então o lado desse hexágono é $\frac{120}{6}$ cm $= 20$ cm e sua área é:

$$S_3 = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



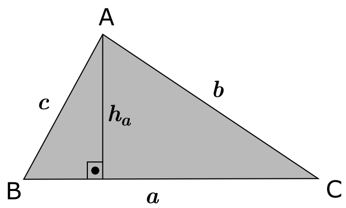
Daí, a razão pedida é:

$$\frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{400\sqrt{3} + 900}{600\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 9}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12 + 9\sqrt{3}}{18} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{6}$$

Expressões da área de um triângulo

1) Área de um triângulo em função dos lados

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e $p = \frac{a+b+c}{2}$



Temos, pelo Exercício Proposto 15 da Aula 10, que:

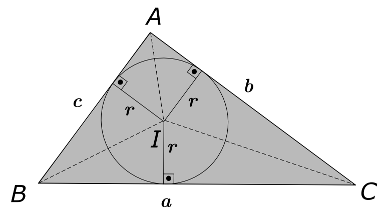
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Logo, a área do triângulo ABC é:

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{a\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2) Área de um triângulo ABC em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita

Considere o triângulo ABC da figura, sendo r o raio do círculo inscrito e os lados desse triângulo sendo a, b e c.

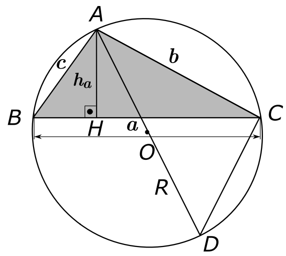


Sendo S a área do triângulo ABC, temos:

$$S = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} \Rightarrow S = pr$$

3) Área de um triângulo em função dos lados e do raio do círculo circunscrito

Considere o triângulo ABC da figura, sendo a sua área S, inscrito em um círculo de raio R e centro O. Trace pelo vértice a altura AH de medida h_a e o diâmetro AD.



Temos que

$$S = \frac{ah_a}{2} \qquad (1)$$

Sejam os triângulos AHB e ACD, temos

$$\left\{\begin{array}{l} m(A\hat{H}B) \ = m(A\hat{C}D) = 90^\circ \\ m(A\hat{B}H) = m(A\hat{D}C) = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right. \underset{AA\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHB \sim \Delta ACD$$

Logo,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{h_a}{b} = \frac{c}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

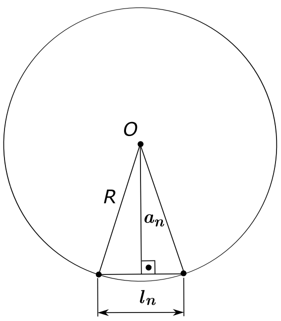
$$S = \frac{a \cdot \frac{bc}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$$

4) Área de um círculo

Teorema 7: A área de um círculo é o produto do número π pelo quadrado do raio.

Prova:

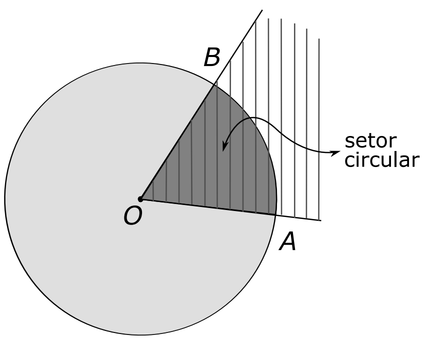
Pelo Teorema 6, temos que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pelo apótema, ou seja, $A_{\text{Polígono regular}} = p \cdot a$.
Seja um círculo de raio R, considere os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo.
Com o crescimento do número de lados, as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro da circunferência e os apótemas se aproximam do raio do círculo.



Note que $l_n \to 0$, $2p \to C$ e $a_n \to R$, onde C é o comprimento da circunferência.

Daí, a área do círculo é:
$A_c = \pi R \cdot R = \pi R^2 \Rightarrow A_c = \pi R^2$

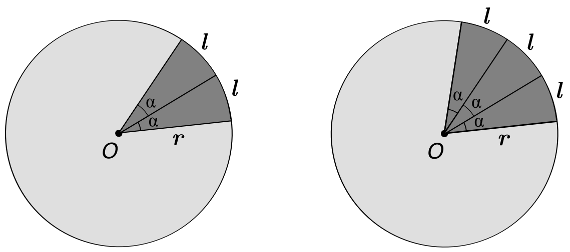
Área do setor circular



Setor circular:
Seja, em um plano, um círculo de centro O e um setor angular $A\hat{O}B$, conforme figura.

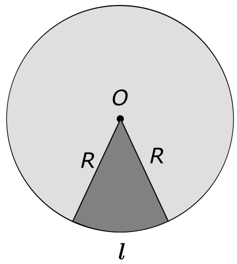
O conjunto dos pontos comuns ao círculo e ao setor angular chama-se setor circular.

Note que se dobrarmos o arco (ou ângulo central) dobra-se a área do setor; triplicando o arco (ou ângulo central), a área do setor é triplicada, e assim por diante.



Daí, a área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou a medida do ângulo central).

De um modo geral:

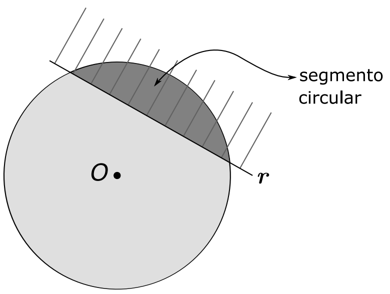


$$\begin{array}{lcl} \text{comprimento} & & \text{área} \\ 2\pi R & - & \pi R^2 \\ l & - & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{l \cdot \pi R^2}{2\pi R} = \frac{lR}{2} \Rightarrow A_{setor} = \frac{lR}{2}$$

Logo, a área de um setor circular é igual ao semiperímetro do comprimento do arco pelo raio.
Temos, também, que:

$$\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & - & \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} & - & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{2\pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

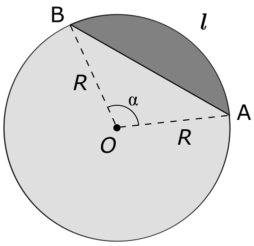
Segmento circular



Seja, em um plano, um círculo e um semiplano de origem na reta r secante ao círculo, conforme a figura.

O conjunto dos pontos comuns ao círculo e ao semiplano denomina-se *segmento circular*.

Área do segmento circular



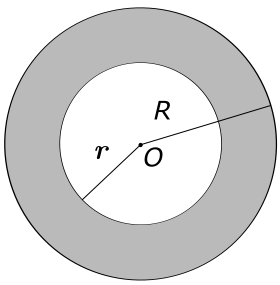
Seja, na figura, R o raio do círculo, α é a medida do ângulo central e l o comprimento do arco.

$$A_{segmento} = A_{setor\ OAB} - A_{\Delta OAB} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$$

$A_{segmento} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha), \alpha$ em radianos.

Área da coroa circular

Coroa circular



Seja em um plano duas circunferências de mesmo centro O, conforme a figura ao lado.

Coroa circular é a união dessas circunferências com os pontos do plano compreendidos entre elas.

Área da coroa circular:

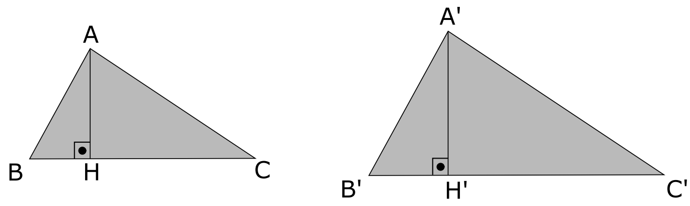
$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$$

Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes

Teorema: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ e seja k a razão de semelhança.



Temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = k$$

Sejam S_1 e S_2 as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, então

$$S_1 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}$$

então

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}}{\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}} = k \cdot k \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes

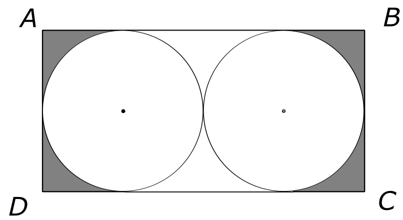
Teorema: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Prova:

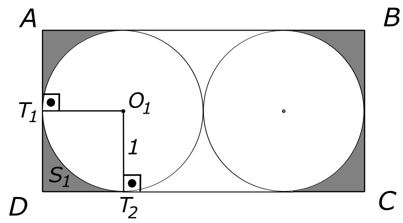
A demonstração desse teorema é análoga à anterior, dividindo os dois polígonos de n lados em $n-2$ triângulos ordenadamente semelhantes.

Exercícios Resolvidos

6. Determine a área da região hachurada, onde $ABCD$ é retângulo e os raios das circunferências valem 1 cm.



Solução:
Considere a figura dada, com os raios das circunferências igual a 1 cm.



Vamos achar a área hachurada.
Temos que:

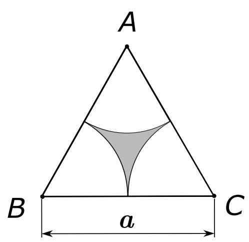
$$S_1 = 1^2 - \pi \cdot \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Note que $O_1T_1DT_2$ é quadrado e $T_1\hat{O}_1T_2 = 90°$.
Daí, a área pedida é:

$$S_p = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = (4 - \pi)\ \text{cm}^2$$

7. Considere um triângulo equilátero de lado a, onde foram traçados três círculos de raio $\frac{a}{2}$, com centros nos vértices desse triângulo. Calcule a área exterior aos círculos e interior ao triângulo equilátero.

Solução:
Considere a figura com os dados do exercício:



Vamos então achar a área hachurada. Note que

$$A\hat{B}C = 60° = B\hat{C}A = B\hat{A}C$$

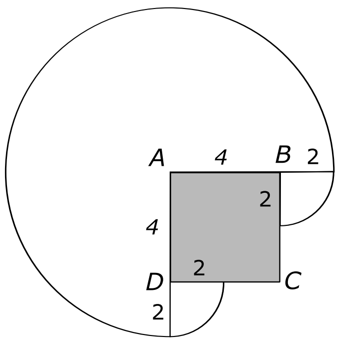
então $A_p = A_{\Delta ABC} - \frac{A_c}{2}$, onde A_c é a área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
Então,

$$A_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{8}$$

$$A_p = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{3} - \pi a^2}{8} = \frac{a^2(2\sqrt{3} - \pi)}{8}$$

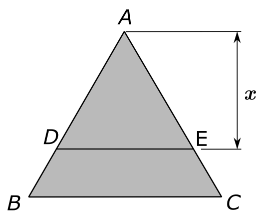
8. No canto A de uma casa de forma quadrada $ABCD$, de 4 metros de lado, prende-se uma corda flexível e inextensível em cuja extremidade livre é amarrada uma pequena estaca que serve para riscar o chão, o qual se supõe que seja plano. A corda tem 6 metros de comprimento, do ponto em que está presa até sua extremidade livre. Mantendo-se a corda sempre esticada, de tal forma que inicialmente sua extremidade livre esteja encostada à parede BC, risca-se o contorno no chão, em volta da casa, até que a extremidade livre toque a parede CD.
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule a área da região exterior à casa, delimitada pelo traçado da estaca.

Solução:
a)



b)$A_p = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} + \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi + 27\pi + \pi = 29\pi \text{ m}^2$

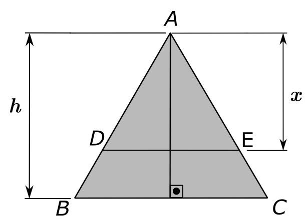
9. O triângulo ABC é equilátero sendo 30 cm a medida do lado que está representado na figura. Determine o valor da altura x do triângulo ADE, se este triângulo e o trapézio $DBCE$ têm a mesma área.



Solução:
Considere a figura, sendo o $\Delta\ ABC$ equilátero, sendo

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 30$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \quad (1)$$



Temos por resultado anterior que

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad (2)$$

Considere

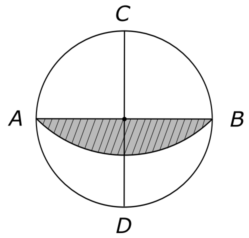
$$S_{ADE} = y \quad (3)$$
$$\Rightarrow\ S_{ABC} = S_{ADE} + S_{\text{Trapézio}DBCE} = 2y \quad (4)$$

já que $S_{ADE} = S_{\text{Trapézio}DBCE}$
Substituindo (1), (3) e (4) em (2) vem:

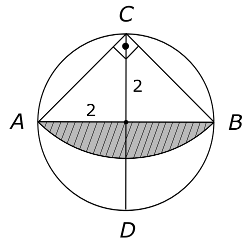
$$\tfrac{y}{2y} = \left(\tfrac{x}{15\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \tfrac{1}{2} = \tfrac{x^2}{225\cdot 3}$$
$$\Rightarrow\ x^2 = \tfrac{225\cdot 3}{2} \Rightarrow x = \tfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow\ x = \tfrac{15\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$$

10. Considere a circunferência, representada a seguir, de raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Com centro em C e raio CA foi traçado o arco $\overset{\frown}{AB}$. Determine a área da região assinalada.



Solução:
Seja a circunferência dada, com raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Temos que



$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{2} \text{ e } A\hat{C}B = \frac{180°}{2} = 90°$$

Denotando a área pedida por A_p vem que:

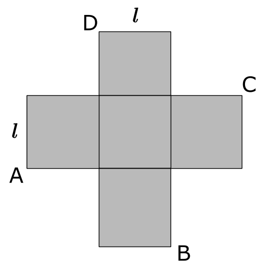
$$A_p = A_{setor\ CAB} - A_{\Delta ACB} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2} = 2\pi - 4$$

Daí, a área da região assinalada é $2(\pi - 2)$ cm^2.

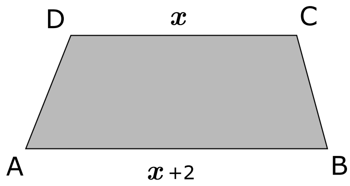
Exercícios Propostos

1. Se o comprimento de um retângulo for aumentado em 10% e a largura em 40%, qual é o aumento da área do retângulo?

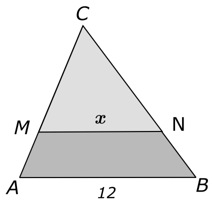
2. Cinco quadrados de lado l formam a cruz da figura. Determine a área do quadrilátero convexo de vértices A, B, C e D.



3. No trapézio $ABCD$, a área mede 21 cm^2 e a altura mede 3 cm. Determine as medidas das bases AB e CD.



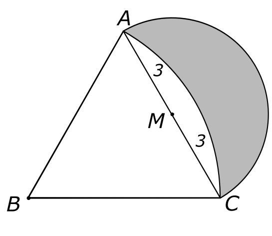
4. Na figura, S_1 é a área do quadrilátero $MNBA$ e S_2 a área do triângulo ABC. Se $S_1 = 51\% S_2$, determine o valor de x se $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.



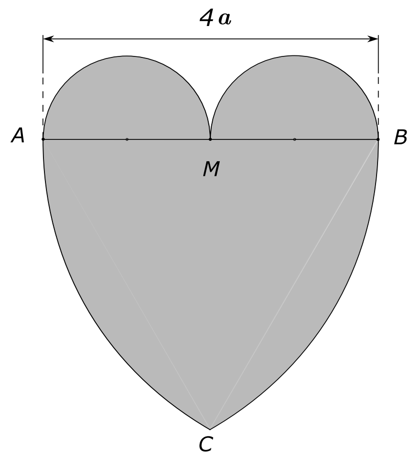
5. Considere um triângulo sendo dados dois ângulos, α e β, e o lado adjacente a esses dois ângulos sendo a. Determine a área desse triângulo em função desses dois ângulos e o lado adjacente a esses dois ângulos.

6. Se p é o perímetro de um triângulo equilátero inscrito num círculo, determine a área do círculo em função de p.

7. Sabendo-se que o triângulo ABC é equilátero de lado 6 cm, o arco menor tem centro em B e o arco maior tem centro no ponto médio de $\overline{AC}$. Determine a área da região assinalada.



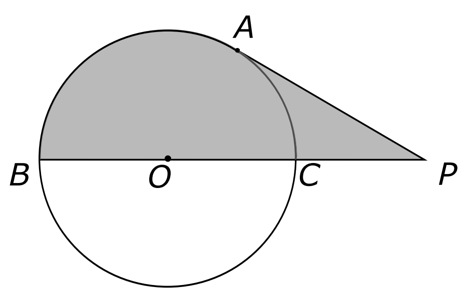
8. Seja dado um segmento de reta AB de medida $4a$ e o ponto médio M do segmento AB. Constroem-se dois semicírculos com centros nos pontos médios dos segmentos AM e BM e raios iguais a a. Com centros, respectivamente, em A e B, raios iguais a $4a$, descrevem-se os arcos BC e AC. Calcule a área da figura assim construída.



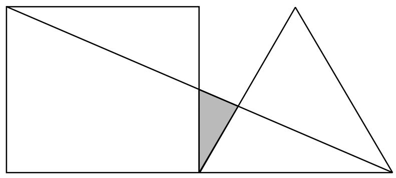
9. Calcule a área do trapézio cujas bases medem 1 metro e 6 metros e os lados oblíquos, respectivamente, 4 metros e 3 metros.

10. Se o perímetro de um triângulo retângulo é 60 metros e a altura relativa à hipotenusa é 12 metros:
a) calcule os lados desse triângulo;
b) calcule a área desse triângulo.

11. O círculo de centro O da figura a seguir tem $\sqrt{6}$ cm de raio. Se PA é tangente à circunferência e a medida do segmento PC é igual a $\sqrt{6}$ cm, determine a área hachurada em cm^2.



12. São dados um quadrado de lado a e um triângulo equilátero de lado a. Calcule a área hachurada, sabendo que os pontos A, B e C são alinhados.



13. Considere o triângulo equilátero de altura $2\sqrt{3}$. Seja P um ponto qualquer interior desse triângulo e sejam x, y e z as distâncias desse ponto aos lados do triângulo equilátero. Determine a soma dessas distâncias.

Gabarito

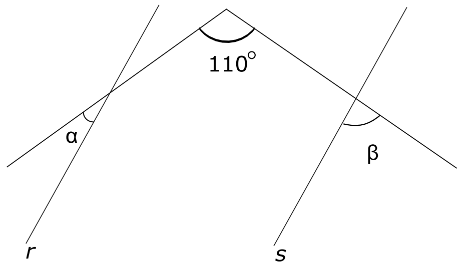
1. 54 %.
2. $5\ l^2$.
3. $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm.
4. $8,4$.
5. $\dfrac{a^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$.
6. $\frac{\pi p^2}{27}$.
7. $\frac{3(6\sqrt{3}-\pi)}{2}$ cm^2.
8. $\frac{(19\pi-12\sqrt{3})}{3}a^2$.
9. 8,4 m^2.
10. a) 15 metros, 20 metros e 25 metros; b) 150 m^2.
11. $(3\sqrt{3}+2\pi)$ cm^2.
12. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-1)}{44}$.
13. $2\sqrt{3}$.

Exercícios Propostos

Exercício 1: Cinco retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. Determine o maior valor que n pode assumir.

Exercício 2: As bissetrizes de dois ângulos adjacentes *AÔB* e *BÔC* são, respectivamente, *OM* e *ON*. A bissetriz do ângulo *MÔN* forma $50°$ com *OC*. Se a medida do ângulo *AÔB* é $80°$, determine o valor da medida do ângulo *BÔC*.

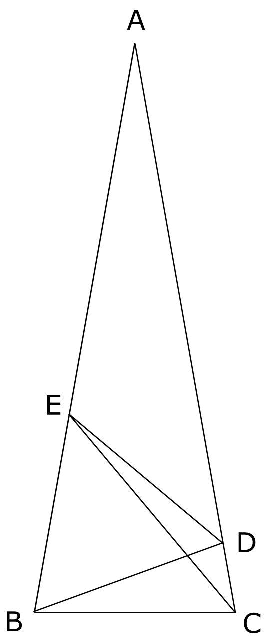
Exercício 3: Considere a reta r paralela a reta s, $r \parallel s$, na figura abaixo.



Determine $\alpha + \beta$.

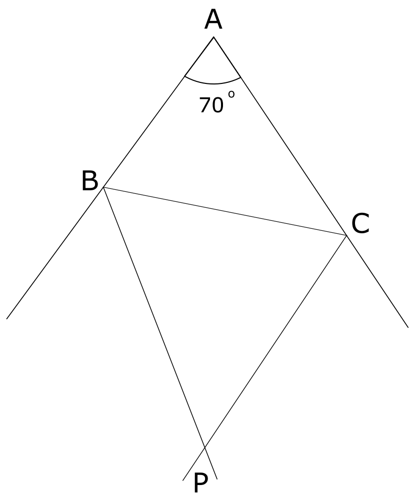
Exercício 4:

Seja a figura ao lado e considere: *AB*= *AC*, *m(EB̂D)*$=60°$, *m(BĈE)*$=50°$ e *m(DĈE)*$=30°$. Determine a medida do ângulo BD̂E.



Exercício 5:

Na figura ao lado, *P* é a interseção das bissetrizes externas em *B* e *C*. Calcule a medida do ângulo $B\hat{P}C$, sabendo que a medida do ângulo $\hat{A}$ é $70°$.



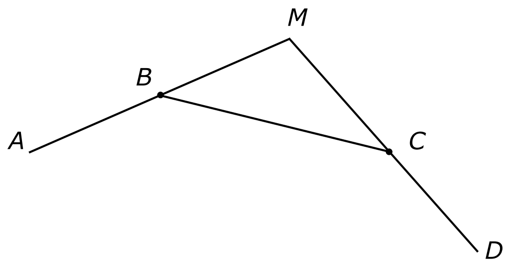
Exercício 6: Num polígono regular convexo *ABCDE...*, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $18°$. Calcule o número de lados do polígono.

Exercício 7: Os lados de um triângulo medem, respectivamente 8 cm, 9 cm e 10 cm. Calcule o perímetro do triângulo que se obtém traçando-se pelos vértices desse triângulo paralelas aos lados opostos.

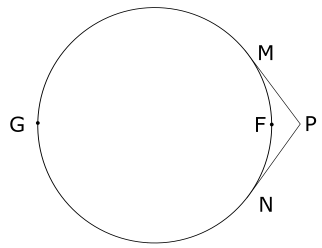
Exercício 8: Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede $190°$. Determine o maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

Exercício 9: Dois polígonos regulares P_1 e P_2 tem respectivamente n e $n+1$ lados. Sabendo-se que a soma das medidas de um ângulo interno de P_1 com um ângulo externo de P_2 vale $168°$, determine o número de diagonais desses polígonos.

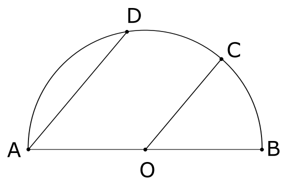
Exercício 10: Determine a medida do ângulo $B\hat{M}C$ formado pelas retas suportes dos lados *AB* e *CD* de um decágono regular da figura abaixo.



Exercício 11: As semi-retas *PM* e *PN* são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco $\overset{\frown}{MGN}$ é quatro vezes o do arco $\overset{\frown}{MFN}$. Calcule o ângulo $M\hat{P}N$.

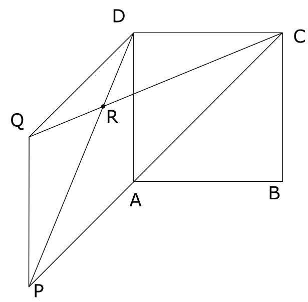


Exercício 12: Na semicircunferência de centro *O* e diâmetro *AB*, temos que $AD \parallel OC$; sendo *A*, *B*, *C* e *D* quatro pontos distintos. Se $m(\overset{\frown}{BC})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{BC}$ e $m(\overset{\frown}{CD})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$, relacione essas duas medidas.

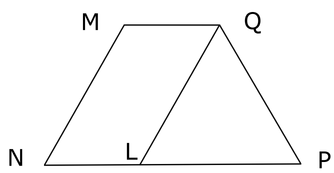


Exercício 13: As diagonais de um trapézio retângulo medem, respectivamente 9 cm e 12 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados desse trapézio.

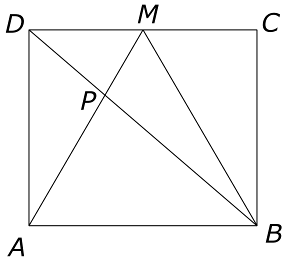
Exercício 14: Considere na figura , *ABCD* um quadrado e *DAPQ* um losango cujo vértice *P* está no prolongamento da diagonal *AC*. Calcule os ângulos do triângulo *DRQ*.



Exercício 15: As bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ de um trapézio medem 42 cm e 112 cm, respectivamente. Calcule o lado $\overline{PQ}$, sabendo que o ângulo $M\hat{Q}P$ é o dobro do ângulo $P\hat{N}M$.

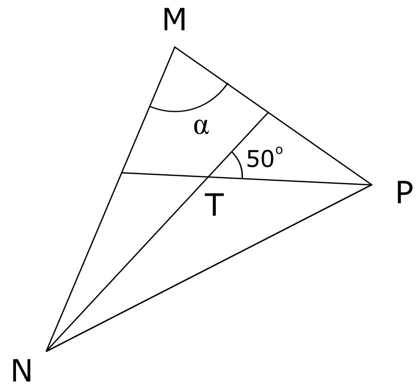


Exercício 16: Na figura *ABCD* é retângulo, *M* é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo *ABM* é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$ cm, calcule $\overline{AP}$.



Exercício 17: Em um triângulo *ABC* os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem respectivamente $70°$ e $60°$. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

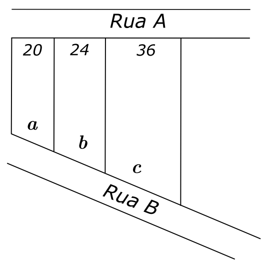
Exercício 18: Se na figura, *T* é o incentro do triângulo *MNP*, determine a medida do ângulo α.



Exercício 19: Mostre que em um triângulo qualquer a medida de cada altura é menor que a semi-soma das medidas dos lados adjacentes a ela.

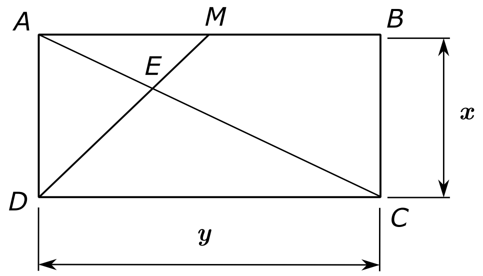
Exercício 20: Mostre que em um triângulo retângulo, a soma das medidas das três alturas é maior que a medida do semiperímetro desse triângulo.

Exercício 21: O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura abaixo. Determine os valores de a, b e c, em metros, sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 120$ metros.

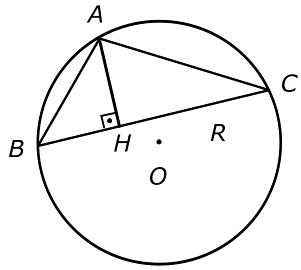


Exercício 22: O perímetro de um triângulo *ABC* é 100 metros. A bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$ divide o lado oposto em dois segmentos que medem 16 metros e 24 metros. Determine a medida dos lados desse triângulo.

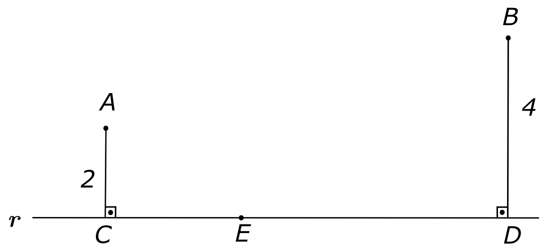
Exercício 23: Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo e *M* é ponto médio de $\overline{AB}$. Se h é altura do triângulo *CDE* relativa ao lado *CD*, e x e y são as medidas dos lados do retângulo, determine a relação entre h, x e y.



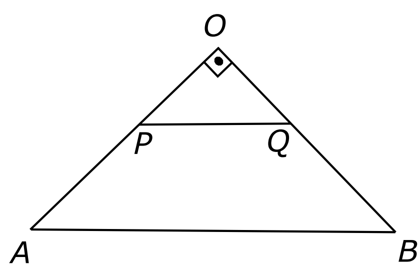
Exercício 24: Calcular o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC* da figura, se $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.



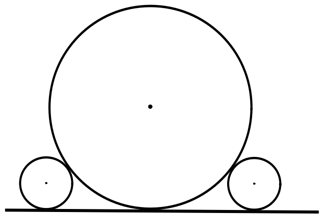
Exercício 25: Na figura abaixo, as distâncias dos pontos *A* e *B* à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de *A* e *B* sobre essa reta são os pontos *C* e *D*. Se a medida de *CD* é 9, a que distância de *C* deverá estar o ponto *E*, do segmento *CD*, para que *m(CÊA)* = *m(DÊB)*?



Exercício 26: Em um triângulo retângulo *OAB*, retângulo em *O*, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, são dados os pontos *P* em *OA* e *Q* em *OB* de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$. Determine o valor de x.

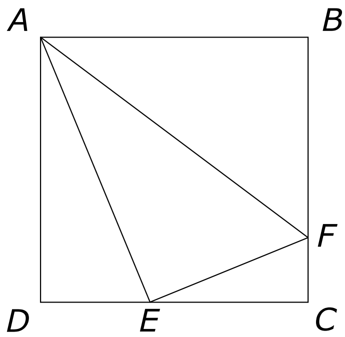


Exercício 27: Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1, C_2 e C_3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura.

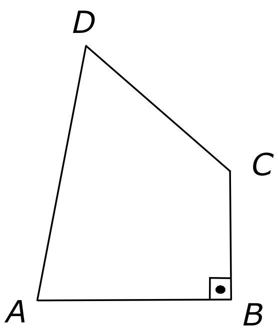


Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

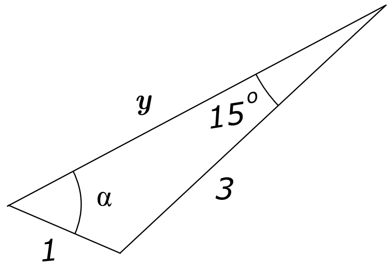
Exercício 28: No quadrado *ABCD* de lado 12 cm, temos $\overline{AE} = 13$ cm e $\overline{CF} = 3$ cm. O ângulo *AÊF* é agudo, reto ou obtuso? Justifique.



Exercício 29: No quadrilátero *ABCD* da figura, $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, *m(AD̂C)* $= 60°$ e *m(AB̂C)* $= 90°$. Determine a medida, em centímetros, do perímetro do quadrilátero.



Exercício 30: Considere o triângulo não retângulo da figura abaixo. Determine $\operatorname{sen} \alpha$.



Exercício 31: A diagonal de um quadrado inscrito em um círculo mede 8 cm. Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito nesse círculo.

Exercício 32: Dado o raio R de uma circunferência, calcular o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

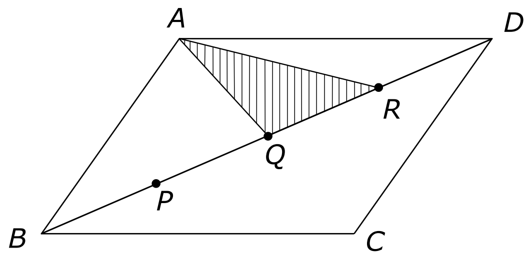
Exercício 33: Em um semicírculo de raio 6 cm, traçam-se duas cordas paralelas que representam os lados de um quadrado e de um hexágono regular inscritos. Calcule a distância entre as duas cordas.

Exercício 34: De quanto aumenta o raio de uma circunferência quando o seu comprimento aumenta de π cm?

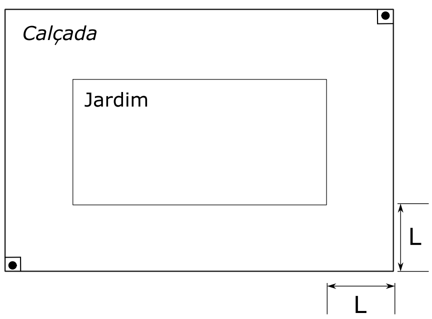
Exercício 35: Em uma engrenagem a roda grande de raio 75 cm faz 900 voltas, enquanto a pequena dá 1500 voltas. Qual o raio da roda pequena?

Exercício 36: Calcule a área de um quadrilátero convexo de diagonais perpendiculares medindo 12 cm e 15 cm.

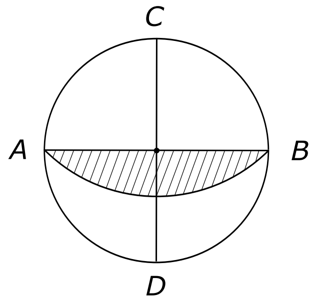
Exercício 37: No paralelogramo *ABCD* de área 48 cm^2, os pontos *P, Q* e *R* dividem a diagonal *BD* em quatro partes de igual medida. Calcule a área do triângulo *AQR*.



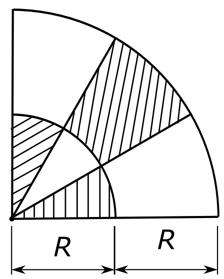
Exercício 38: Num terreno retangular com 54 cm^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 6 metros por 3 metros, contornado por uma calçada de largura *L*, como indica a figura. Calcule o valor de *L*.



Exercício 39: Considere a circunferência, representada abaixo, de raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Com centro em C e raio CA foi traçado o arco $\widehat{AB}$. Determine a área da região assinalada.



Exercício 40: A figura mostra dois arcos de circunferência de centro O, raios R e $2R$ e três ângulos congruentes. Calcule a razão entre as áreas da região hachurada e não hachurada.

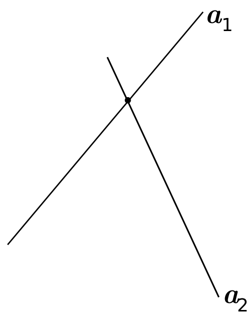


Exercícios Resolvidos

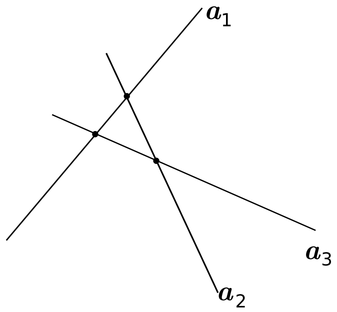
Exercício 1: Cinco retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. Determine o maior valor que n pode assumir.

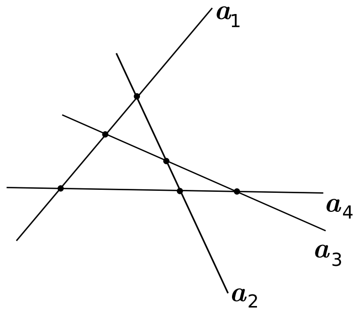
Solução:

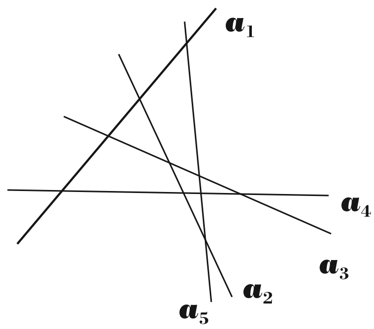
Considere a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 as cinco retas.
Como queremos o maior valor que n pode assumir, então a segunda reta deve cortar a primeira.
Observe a figura ao lado:



A terceira reta deve cortar as duas primeiras e assim por diante.







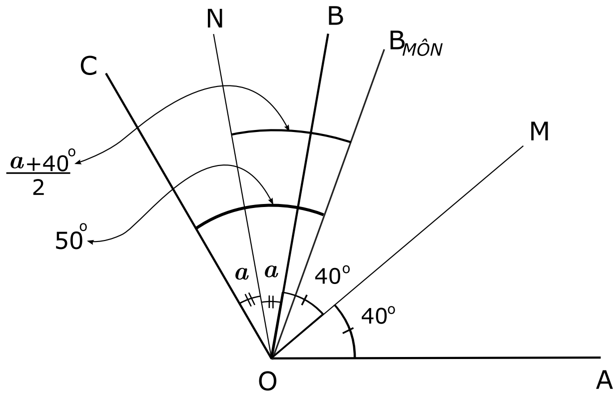
Daí, temos que o número de pontos será :

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

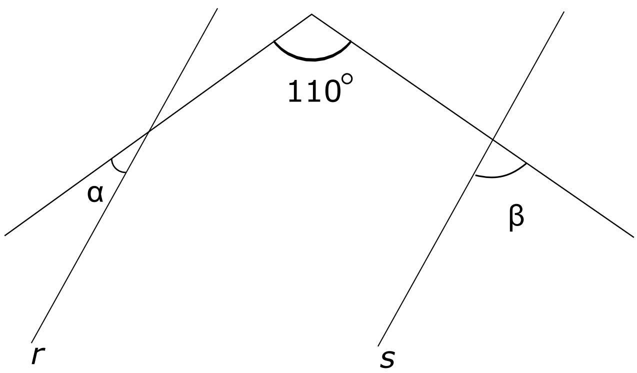
Exercício 2: As bissetrizes de dois ângulos adjacentes *AÔB* e *BÔC* são, respectivamente, *OM* e *ON*. A bissetriz do ângulo *MÔN* forma $50°$ com *OC*. Se a medida do ângulo *AÔB* é $80°$, determine o valor da medida do ângulo *BÔC*.

Solução: Considere os ângulos adjacentes *AÔB* e *BÔC* e a s bissetrizes *OM* e *ON* de *AÔB* e *BÔC*, respectivamente. A medida do ângulo *AÔB* é $80°$, ou seja, *m(AÔB)*$=80°$.

Denomine *m(BÔC)*$=2a$.
Achando a bissetriz de *MÔN*, temos que esta faz $50°$ com *OC*.
Daí, temos que $a + \dfrac{a+40°}{2} = 50° \Rightarrow 2a + a + 40° = 100° \Rightarrow 3a = 60° \Rightarrow a = 20°$
Logo *m(BÔC)*$=2a = 2 \cdot 20° = 40°$.



Exercício 3: Considere a reta r paralela a reta s, $r \parallel s$, na figura abaixo.

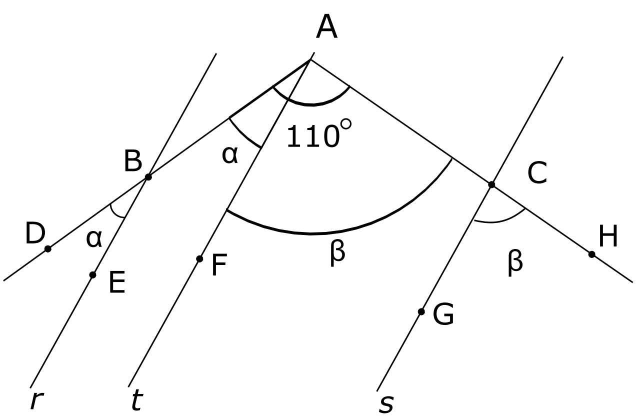


Determine $\alpha + \beta$.

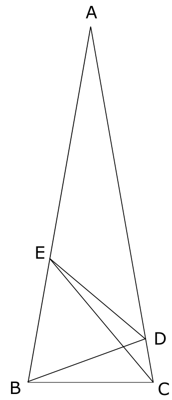
Solução:

Considere a figura dada e $r \parallel s$. Seja *A, B, C, D, E, F, G* e *H* na figura dada.
Seja a reta $t \parallel r$ passando por *A* e $F \in t$.
Temos que:
$D\hat{B}E = \alpha = B\hat{A}F$ (ângulos correspondentes)
$G\hat{C}H = \beta = F\hat{A}C$ (ângulos correspondentes)
Daí

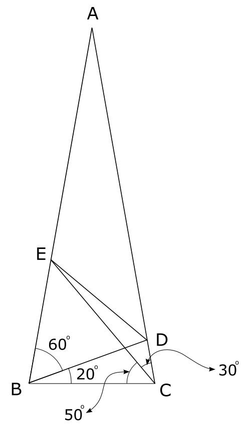
$$\alpha + \beta = 110^\circ$$



Exercício 4:



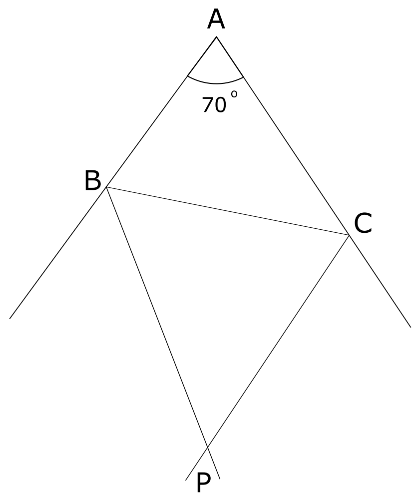
Seja a figura ao lado e considere:
AB$=$ *AC*, *m(E$\hat{B}$D)*$=60°$, *m(B$\hat{C}$E)*$=50°$ e *m(D$\hat{C}$E)*$=30°$.
Determine a medida do ângulo B$\hat{D}$E.



Solução:
Considere a figura dada e que *AB* $=$ *AC*, *m(E$\hat{B}$D)* $= 60°$, *m(B$\hat{C}$E)* $= 50°$ e *m(D$\hat{C}$E)* $= 30°$.
Como *AB* $=$ *AC*, então *m(A$\hat{B}$C)* $=$ *m(A$\hat{C}$B)*$=80°$
Temos que ΔCBD é isósceles, já que *m(B$\hat{D}$C)* $= 80°$. Então *BC* $=$ *BD*.
Temos que ΔBCE é isósceles, já que *m(B$\hat{E}$C)* $= 50°$. Então *BC* $=$ *BE*.
Logo *BD* $=$ *BE* e *m(D$\hat{B}$E)* $= 60°$, então ΔBED é equilátero, já que se *X* $=$ *m(B$\hat{D}$E)* $=$ *m(B$\hat{E}$D)*.
Temos que $X + X + 60° = 180° \Rightarrow X = 60°$
Logo *m(B$\hat{D}$E)*$=60°$

Exercício 5:

Na figura ao lado, *P* é a interseção das bissetrizes externas em *B* e *C*. Calcule a medida do ângulo *B$\hat{P}$C*, sabendo que a medida do ângulo $\hat{A}$ é $70°$.



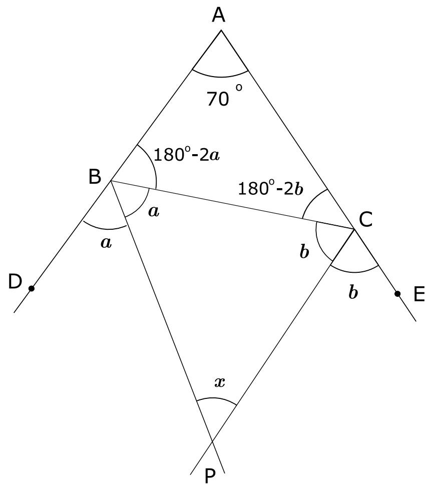
Exercício 6: Num polígono regular convexo *ABCDE...*, o ângulo *B$\hat{A}$D* mede $18°$. Calcule o número de lados do polígono.
Solução: Seja o polígono regular convexo *ABCDE...* e considere *m(B$\hat{A}$D)* $= 18°$.

Temos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$ e que Δ *ABC* $=$ Δ *BCD* pois :

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{BC} \text{ comum (LAL)} \\ m(A\hat{B}C) = m(B\hat{C}D) \text{ (ângulo interno do polígono)} \end{cases}$$

Solução:

Seja a figura dada e considere P a interseção das bissetrizes externas em B e em C e $m(\hat{A}) = 70°$.
Seja $m(D\hat{B}P) = a$, $m(P\hat{C}E) = b$ e $m(B\hat{P}C) = x$.
Então



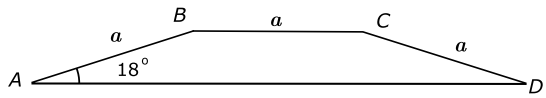
$$\begin{cases} a+b+x=180° & (1) \\ 180°-2a+180°-2b+70°=180° & (2) \end{cases}$$

De (2) vem: $250° = 2a+2b \Rightarrow a+b=125°$ (3)
Substituindo (3) em (1) vem,

$$125° + x = 180° \Rightarrow x = 55°$$

Portanto $m(B\hat{P}C) = 55°$.

então, $\overline{AC} = \overline{BD}$



Temos ainda que Δ $ABD = \Delta$ ACD, pois

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AC} = \overline{BD} \text{ (LLL)} \\ \overline{AD} \text{ comum} \end{cases}$$

então $m(A\hat{D}C) = m(B\hat{A}D) = 18° \Rightarrow m(B\hat{C}D) = 162°$ (ângulo interno do polígono).
Daí

$$162 = \frac{180(n-2)}{n} \Rightarrow 162n = 180n - 360 \Rightarrow 18n = 360 \Rightarrow n = 20$$

Logo o número de lados é 20.

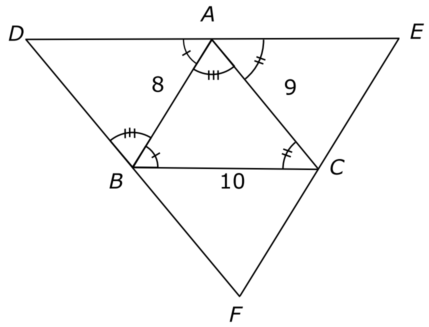
Exercício 7: Os lados de um triângulo medem, respectivamente 8 cm, 9 cm e 10 cm. Calcule o perímetro do triângulo que se obtém traçando-se pelos vértices desse triângulo paralelas aos lados opostos.

Solução:

Seja o triângulo ABC de lados 8 cm, 9 cm e 10 cm. Traçando pelos vértices desse triângulo paralelas aos lados opostos, construimos o novo triângulo que vamos denotar por DEF.

Como $BC \parallel AD \Rightarrow D\hat{A}B = A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B = C\hat{A}E$ (alternos internos)

$$AC \parallel BD \Rightarrow B\hat{A}C = D\hat{B}A$$



Daí $B\hat{D}A = B\hat{C}A$ já que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Logo $\Delta\ ADB = \Delta\ ABC$, pois $\begin{cases} AB \text{ comum} \\ D\hat{A}B = A\hat{B}C \text{ (ALA)} \\ D\hat{B}A = B\hat{A}C \end{cases}$

De forma similar, temos que:

$$\Delta\ BFC = \Delta\ ABC \qquad \text{e} \qquad \Delta\ AEC = \Delta\ ABC$$

então

$$\overline{DB} = \overline{BF} = 9, \overline{AD} = \overline{AE} = 10, \overline{FC} = \overline{CE} = 8$$

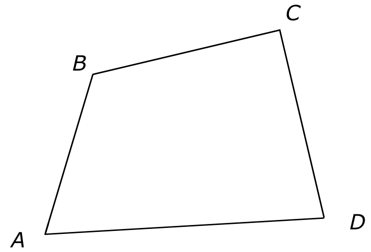
Daí o perímetro desse novo triângulo é:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 54$$

Note que o perímetro deu o dobro do perímetro do triângulo inicial.

Exercício 8: Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede $190°$. Determine o maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

Solução: Considere um quadrilátero convexo tal que a soma de dois ângulos internos consecutivos mede $190°$. Temos que



$$\hat{A} + \hat{B} = 190° \qquad (1)$$

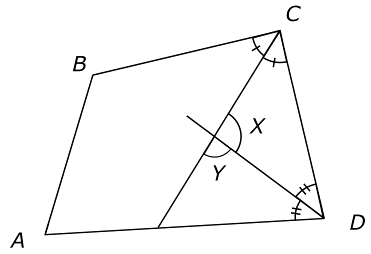
Sabemos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180°(4-2) = 360° \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2) vem :

$$\hat{C} + \hat{D} = 360° - 190° = 170°$$

Traçando as bissetrizes interna de $\hat{C}$ e $\hat{D}$ vem:



Denotando os ângulos entre as bissetrizes de X e Y, temos:

$$Y = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2} = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$
$$X+Y = 180^\circ \Rightarrow X = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Logo o maior dos ângulos é 95°.

Exercício 9: Dois polígonos regulares P_1 e P_2 tem respectivamente n e $n+1$ lados. Sabendo-se que a soma das medidas de um ângulo interno de P_1 com um ângulo externo de P_2 vale 168°, determine o número de diagonais desses polígonos.

Solução: Sejam dois polígonos regulares P_1 e P_2 com n e $n+1$ lados. Temos que:

$$Ai_{P_1} + Ae_{P_2} = 168^\circ \Rightarrow \frac{180(n-2)}{n} + \frac{360}{n+1} = 168^\circ$$

$$(180n - 360)(n+1) + 360n = 168n^2 + 168n$$

$$180n^2 - 360n + 180n - 360 + 360n - 168n^2 - 168n = 0$$

$$12n^2 + 12n - 360 = 0$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -6 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

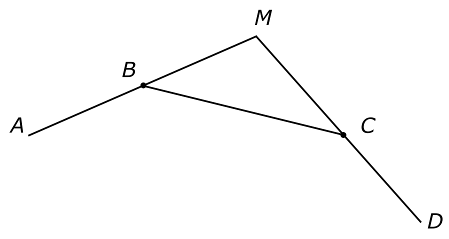
P_1 tem n lados e $n = 5 \Rightarrow d_1 = \dfrac{5(5-3)}{2} = 5$

P_2 tem $n+1$ lados e $n+1 = 6 \Rightarrow d_2 = \dfrac{6(6-3)}{2} = 9$

O número de diagonais é: para P_1, 5 diagonais e para P_2, 9 diagonais.

Exercício 10: Determine a medida do ângulo $B\hat{M}C$ formado pelas retas suportes dos lados AB e CD de um decágono regular da figura abaixo.

Solução: Seja a figura dada. Temos que os ângulos $B\hat{M}C$ e $M\hat{C}B$ são congruentes por serem ângulos externos de um mesmo polígono regular e cada ângulo externo vale $\dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.



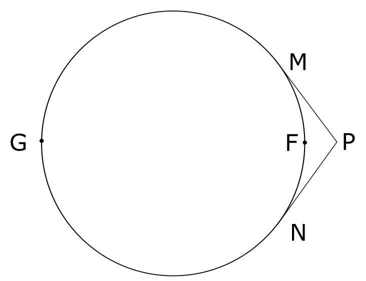
Portanto o Δ *BMC* é isósceles e daí

$$\hat{B} + \hat{M} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 36^\circ + 36^\circ + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Daí

$$m(B\hat{M}C) = 108^\circ$$

Exercício 11: As semi-retas *PM* e *PN* são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco $\overset{\frown}{MGN}$ é quatro vezes o do arco $\overset{\frown}{MFN}$. Calcule o ângulo $M\hat{P}N$.



Solução:

Considere a figura dada e que o comprimento do arco $\overset{\frown}{MGN}$ é 4 vezes o do arco $\overset{\frown}{MFN}$.
$M\hat{P}N$ é um ângulo excêntrico externo.
Daí

$$M\hat{P}N = \frac{\overset{\frown}{MGN} - \overset{\frown}{MFN}}{2} = \frac{4\,\overset{\frown}{MFN} - \overset{\frown}{MFN}}{2} = \frac{3\,\overset{\frown}{MFN}}{2} \quad (1)$$

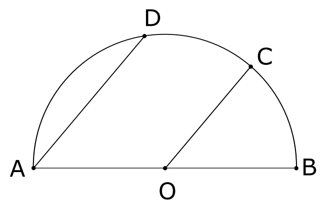
Mas

$$\overset{\frown}{MGN} + \overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow 4\,\overset{\frown}{MFN} + \overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow 5\,\overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MFN} = 72^\circ \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$\overset{\frown}{MFN} = \frac{3 \cdot 72}{2} = 108^\circ$$

Exercício 12: Na semicircunferência de centro *O* e diâmetro *AB*, temos que $AD \parallel OC$; sendo *A*, *B*, *C* e *D* quatro pontos distintos. Se $m(\overset{\frown}{BC})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{BC}$ e $m(\overset{\frown}{CD})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$, relacione essas duas medidas.



Solução:
Seja a semicircunferência de centro O e diâmetro AB com $AD \parallel OC$; sendo A, B, C e D quatro pontos distintos.
Temos que $m(B\hat{O}C) = m(B\hat{A}D)$ (1) (ângulos correspondentes; note que $B\hat{O}C$ é ângulo central e $B\hat{A}D$ é ângulo inscrito).
Temos que :

$$m(B\hat{O}C) = m(\overset{\frown}{BC}) \qquad (2)$$

$$e$$

$$m(B\hat{A}D) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \qquad (3)$$

Substituindo (1) em (3) vem:

$$m(B\hat{O}C) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$

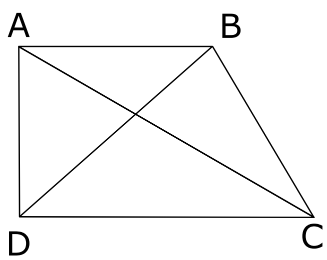
De (2):

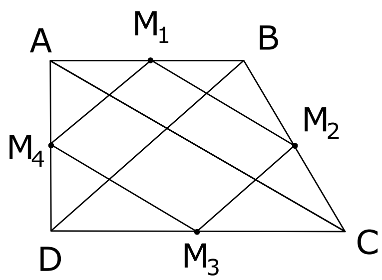
$$m(\overset{\frown}{BC}) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \Rightarrow m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC}) = 2m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{BC})$$

Logo

$$m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{BC})$$

Exercício 13: As diagonais de um trapézio retângulo medem, respectivamente 9 cm e 12 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados desse trapézio.
Solução:
Considere um trapézio retângulo $ABCD$ cujas diagonais medem, respectivamente 9 cm e 12 cm.





Sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 os pontos médios de AB, BC, CD e AD, respectivamente.
Temos que :

$$M_1M_4 \text{ é base média do } \Delta\ ABD \Rightarrow M_1M_4 = \frac{9}{2}$$

$$M_2M_3 \text{ é base média do } \Delta\ BCD \Rightarrow M_2M_3 = \frac{9}{2}$$

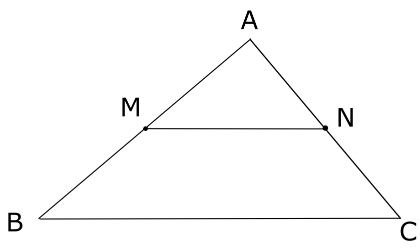
$$M_1M_2 \text{ é base média do } \Delta\ ABC \Rightarrow M_1M_2 = \frac{12}{2}$$

$$M_3M_4 \text{ é base média do } \Delta\ ADC \Rightarrow M_3M_4 = \frac{12}{2}$$

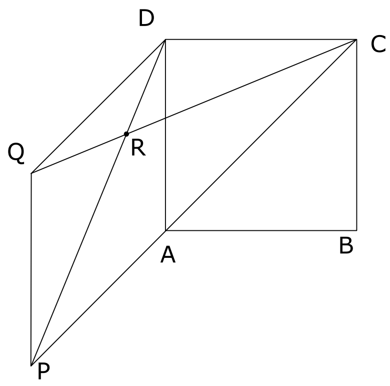
Daí o perímetro pedido é:

$$\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{12}{2} + \frac{12}{2} = 21$$

Nota: Dado um triângulo ABC, considere M ponto médio de AB e N ponto médio de $AC \Rightarrow MN$ é base média, $MN = \dfrac{BC}{2}$ e $MN \parallel BC$.

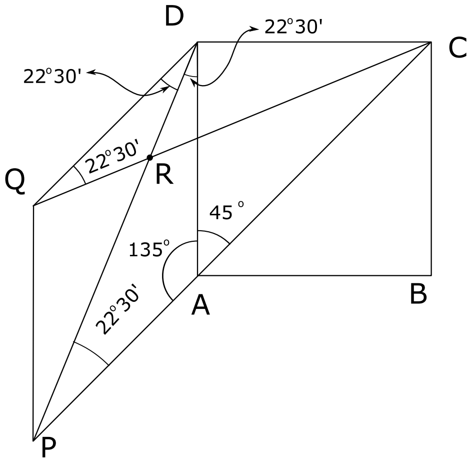


Exercício 14: Considere na figura , $ABCD$ um quadrado e $DAPQ$ um losango cujo vértice P está no prolongamento da diagonal AC. Calcule os ângulos do triângulo DRQ.



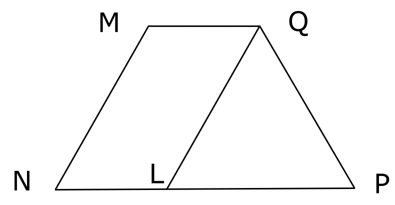
Solução:

Considere a figura dada e seja $ABCD$ um quadrado, $DAPQ$ um losango e P está no prolongamento da diagonal AC.



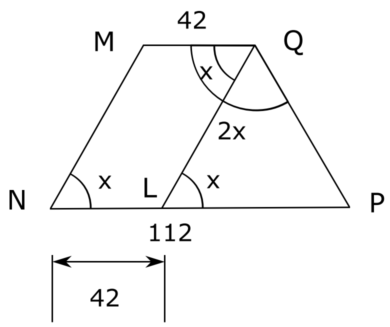
Temos que $D\hat{A}C = 45°$ (bissetriz do vértice de um quadrado)
Então
$$P\hat{A}D = 180° - 45° = 135°$$
Mas Δ *ADP* é isósceles, já que $\overline{AP} = \overline{AD}$ (Propriedade do losango)
Então
$P\hat{A}D + A\hat{P}D + A\hat{D}P = 180°$ e $A\hat{P}D = A\hat{D}P \Rightarrow 135° + 2A\hat{P}D = 180° \Rightarrow A\hat{P}D = 22°30'$
Logo como a diagonal é bissetriz no losango vem:
$$Q\hat{D}R = 22°30'.$$
Daí
$$Q\hat{D}C = 90° + 45° = 135°$$
Temos que Δ *DQC* é isósceles, pois $\overline{QD} = \overline{DC} \Rightarrow D\hat{Q}C = D\hat{C}Q$.
Daí
$$135° + D\hat{Q}C + D\hat{C}Q = 180° \Rightarrow 135° + 2D\hat{Q}C = 180° \Rightarrow D\hat{Q}C = 22°30'$$
No Δ *QDR*, temos:
$$22°30' + 22°30' + Q\hat{R}D = 180° \Rightarrow Q\hat{R}D = 135°$$
Logo os ângulos pedidos são : $22°30', 22°30'$ e $135°$.

Exercício 15: As bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ de um trapézio medem 42 cm e 112 cm, respectivamente. Calcule o lado $\overline{PQ}$, sabendo que o ângulo $M\hat{Q}P$ é o dobro do ângulo $P\hat{N}M$



Solução:

Considere o trapézio *MQPN* dado com $\overline{MQ} = 42$ cm e $\overline{NP} = 112$ cm e *m*($M\hat{Q}P$) $= 2$ *m*($M\hat{N}P$).



Seja $QL \parallel MN \Rightarrow MQLN$ é um paralelogamo, pois $MQ \parallel NL$ (Definição de trapézio)
$QL \parallel MN$ (Por construção)
Denotemos $m(M\hat{N}P) = x \Rightarrow m(M\hat{Q}P) = 2\ x$

Temos que:

1) $\overline{MQ} = \overline{NL} = 42$ (Propriedade de paralelogramo)

2) $m(Q\hat{L}P)$ $=m(M\hat{N}L) = x$ (ângulos correspondentes)

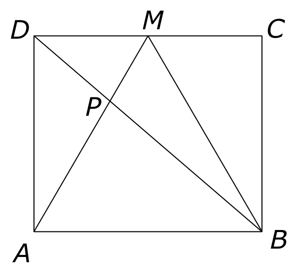
3) $m(M\hat{N}L)$ $=m(M\hat{Q}L) = x$ (ângulos opostos do paralelogramo são congruentes)

Temos que $m(L\hat{Q}P) = 2x$ - $x = x$

Portanto Δ QLP é isósceles de base QL então $\overline{PL} = \overline{PQ}$ e $\overline{PL} = 112 - 42 = 70$

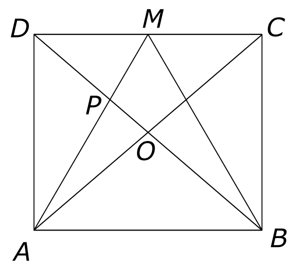
Logo $\overline{PQ} = 70$ cm.

Exercício 16:
Na figura $ABCD$ é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$ cm, calcule $\overline{AP}$.



Solução:

Seja na figura $ABCD$ retângulo, M ponto médio de $\overline{CD}$ e Δ ABM é equilátero. $\overline{AB} = 15$ cm.



Trace a diagonal AC e seja O o encontro das diagonais AC e BD. Temos que no Δ ACD, $\overline{AM}$ e $\overline{DO}$ são medianas e P é o baricentro deste triângulo $\Rightarrow \overline{AP} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM}$ (1)
Mas $\overline{AM} = \overline{AB}$ (2) (Δ ABM é equilátero).
De (1) e (2)

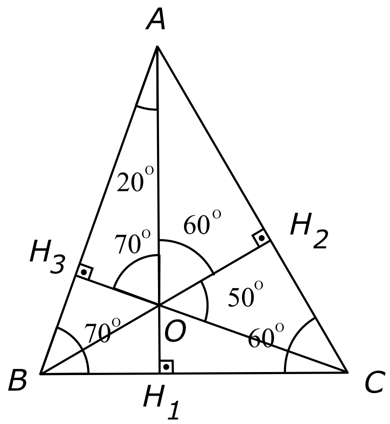
$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

Logo $\overline{AP} = 10$ cm.

Exercício 17: Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem respectivamente $70°$ e $60°$. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

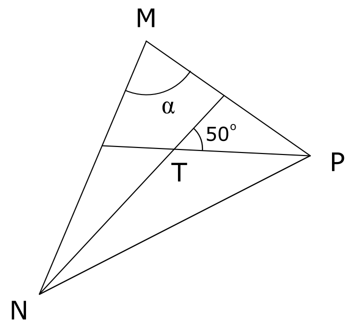
Solução:

Seja um triângulo ABC, $\hat{B}= 70°$ e $\hat{C}=60°$.

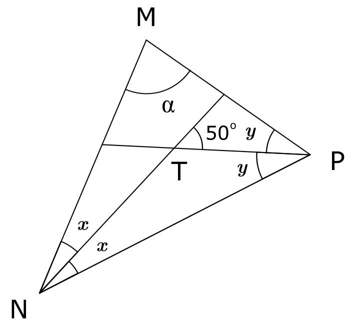


Tracemos as três alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$, o encontro dessas alturas, denotemos por O(ortocentro).
Vamos achar os ângulos formados pelas interseções dessas alturas.
$B\hat{A}H_1 = 180° - 90° - 70° = 20° \Rightarrow H_3\hat{O}A = 180° - 90° - 20° = 70°$
$C\hat{A}H_1 = 180° - 90° - 60° = 30° \Rightarrow A\hat{O}H_2 = 180° - 90° - 30° = 60°$
$C\hat{O}H_2 = 180° - 60° - 70° = 50°$
Portanto a razão entre os dois maiores ângulos pedidos é: $\dfrac{70}{60} = \dfrac{7}{6}$ ou $\dfrac{60}{70} = \dfrac{6}{7}$

Exercício 18: Se na figura, *T* é o incentro do triângulo *MNP*, determine a medida do ângulo α.



Solução: Seja a figura:



Denominemos $M\hat{N}T = x$ e $N\hat{P}T = y$ $\quad \Rightarrow \quad$ $P\hat{N}T = x$ e $M\hat{P}T = y$
Daí temos

$$50^\circ = x + y \ \ (1) \quad \text{e} \quad \alpha + 2x + 2y = 180^\circ \ \ (2)$$

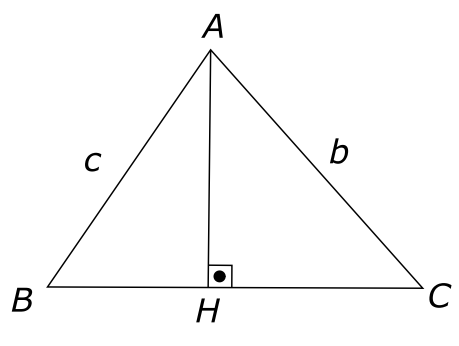
Substituindo (1) em (2) vem:

$$\alpha + 2(x + y) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$$

Exercício 19: Mostre que em um triângulo qualquer a medida de cada altura é menor que a semi-soma das medidas dos lados adjacentes a ela.

Solução:

Seja *ABC* um triângulo cuja altura *AH* mede h_a e os lados adjacentes b e c.



Vamos provar que

$$h_a < \frac{b + c}{2}$$

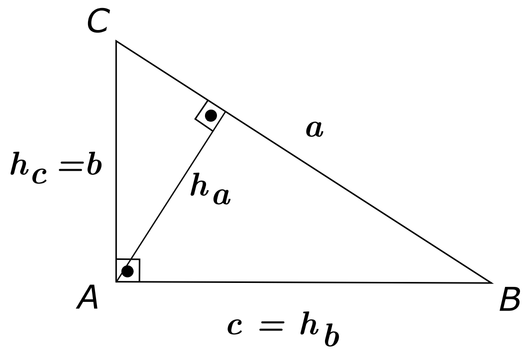
De fato,
a medida da altura *AH* é menor que as medidas dos lados adjacentes, *AC* e *AB*, visto que o segmento perpendicular é menor que qualquer oblíqua.
Daí:

$$\begin{matrix} h_a < b \\ h_a < c \end{matrix} \Rightarrow h_a + h_b < b + c \Rightarrow ha < \frac{b+c}{2}$$

Exercício 20: Mostre que em um triângulo retângulo, a soma das medidas das três alturas é maior que a medida do semiperímetro desse triângulo.

Solução:

Considere um triângulo retângulo com lados medindo b, c e a e a sendo a hipotenusa.

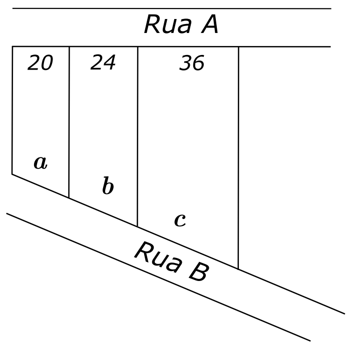


Consideremos as alturas relativas aos lados:
a como h_a
b como h_c
c como h_b
Note que neste triângulo :

$$b = h_c \quad \text{e} \quad c = h_b$$

$$\begin{aligned} b + c > a \Rightarrow h_c + h_b > a \quad &\Rightarrow 2h_a + h_b + h_c > a \\ &\Rightarrow 2h_a + h_b + c + h_c + b > a + b + c \\ &\Rightarrow 2h_a + 2h_b + 2h_c > a + b + c \\ &\Rightarrow h_a + h_b + h_c > \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

Exercício 21: O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura abaixo. Determine os valores de a, b e c, em metros, sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 120$ metros.



Solução:

De acordo com o Teorema de Tales, tem-se: $\dfrac{a}{20} = \dfrac{b}{24} = \dfrac{c}{36}$.
Assim:

$$\frac{a+b+c}{20+24+36} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36} \Rightarrow \frac{120}{80} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30 \\ b = \dfrac{24 \cdot 3}{2} = 36 \\ c = \dfrac{36 \cdot 3}{2} = 54 \end{cases}$$

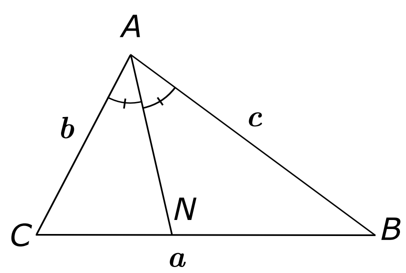
Logo os valores são: $a = 30$ metros, $b = 36$ metros e $c = 54$ metros.

Exercício 22: O perímetro de um triângulo *ABC* é 100 metros. A bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$ divide o lado oposto em dois segmentos que medem 16 metros e 24 metros. Determine a medida dos lados desse triângulo.

Solução:

Seja um triângulo *ABC*, cujo perímetro é 100 metros.

$$a + b + c = 100 \qquad (1)$$



Seja *AN* a bissetriz interna. Temos que:

$$\overline{CN} = 16 \qquad (2) \qquad \text{e} \qquad \overline{BN} = 24 \qquad (3)$$

Usando o Teorema da bissetriz interna vem:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{b}{c} \qquad (4)$$

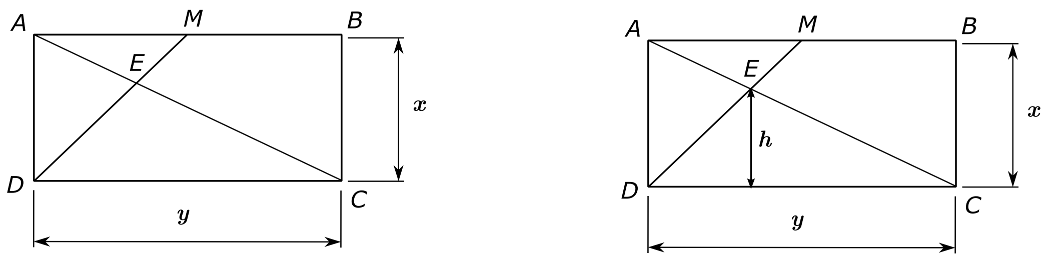
Como $a = 16 + 24 = 40$ vem que $b + c = 100 - 40 = 60$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{16}{24} \\ \\ b + c = 60 \end{cases} \Rightarrow \frac{b+c}{b} = \frac{16+24}{16} \Rightarrow \frac{60}{b} = \frac{40}{16} \Rightarrow b = \frac{60 \cdot 16}{40} = 24.$$

Como $b + c = 60 \Rightarrow c = 60 - 24 = 36$.

Daí as medidas dos lados do triângulo $a = 40$ cm, $b = 24$ cm, e $c = 36$ cm.

Exercício 23: Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo e *M* é ponto médio de $\overline{AB}$. Se h é altura do triângulo *CDE* relativa ao lado *CD*, e x e y são as medidas dos lados do retângulo, determine a relação entre h, x e y.



Solução:

Seja a figura dada, ou seja, *ABCD* é um retângulo e *M* é ponto médio de *AB*.

h é altura do triângulo *CDE* relativa ao lado *CD*;

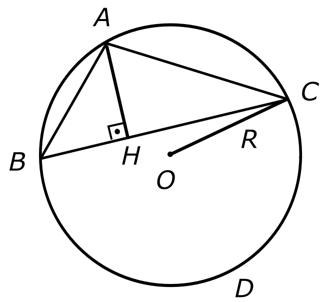
x e y são as medidas dos lados do retângulo.

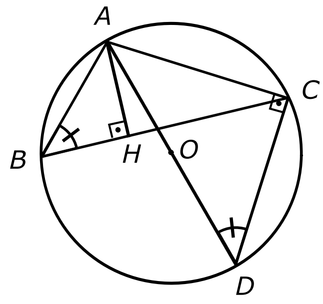
$$\Delta CDE \sim \Delta AME \text{ pois } \begin{cases} A\hat{E}M = D\hat{E}C \\ M\hat{A}E = D\hat{C}E \end{cases} \qquad (AA \sim)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AM}} = \frac{h}{x-h} \Rightarrow \frac{y}{\frac{y}{2}} = \frac{h}{x-h} \Rightarrow 2 = \frac{h}{x-h} \Rightarrow 2x - 2h = h \Rightarrow 2x = 3h$$

Logo a relação pedida é: $3h = 2x$.

Exercício 24: Calcular o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC* da figura, se $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.





Solução:

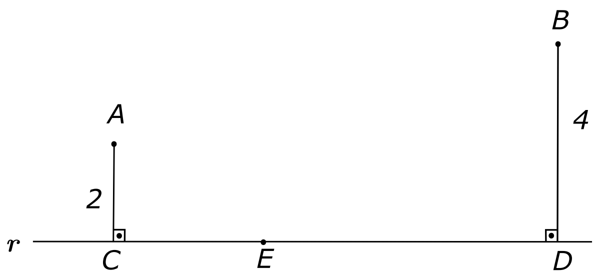
Seja a figura com: $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.
O o centro da circunferência.
Tracemos o diâmetro AD.

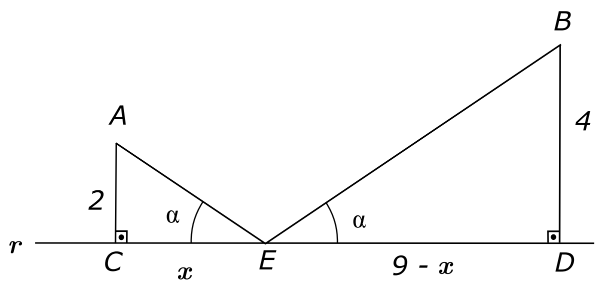
Temos que $A\hat{C}D = 90°$, já que $\overset{\frown}{ABD} = 180°$ e $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{ABD}}{2}$

Daí $\Delta ABH \sim \Delta ADC$, já que $A\hat{H}B = A\hat{C}D = 90°$ e $A\hat{B}H = A\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$
Assim

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{2R} \Rightarrow R = 4$$

Exercício 25: Na figura abaixo, as distâncias dos pontos A e B à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento CD, para que $m(C\hat{E}A) = m(D\hat{E}B)$?





Solução: Seja a figura com os dados do exercício.

Seja x a medida de C a E.
Como

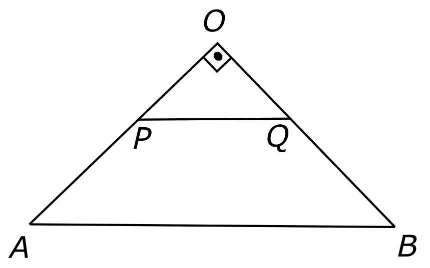
$$\overline{CD} = 9 \Rightarrow \overline{ED} = 9 - x$$

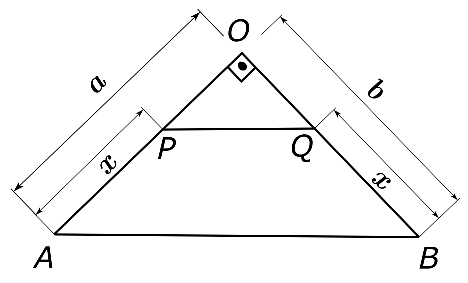
Denomine $m(C\hat{E}A) = m(D\hat{E}B) = \alpha \Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta BDE$ (Critério AA$\sim$)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{CE}}{9 - x}$, ou seja, $\dfrac{2}{4} = \dfrac{x}{9 - x}$.

Daí $4x = 18 - 2x \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$.

Exercício 26: Em um triângulo retângulo *OAB*, retângulo em *O*, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, são dados os pontos *P* em *OA* e *Q* em *OB* de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$. Determine o valor de x.





Solução:

Seja um triângulo retângulo *OAB*, retângulo em *O*, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. São dados os pontos *P* em *OA* e *Q* em *OB* de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$.
Considere o Δ *OPQ* retângulo:

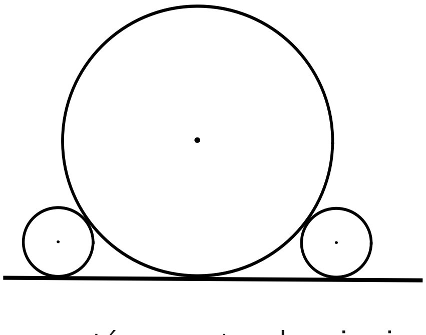
$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 \Rightarrow (a-x)^2 + (b-x)^2 = x^2.$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = x^2$$
$$x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$$

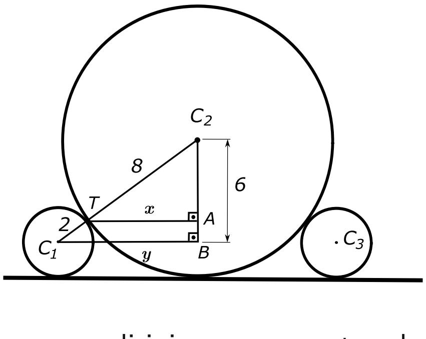
Resolvendo a equação vem:

$$x = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{(2(a+b))^2 - 4(a^2+b^2)}}{2} = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{8ab}}{2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{2(a+b) \pm 2\sqrt{2ab}}{2} = \begin{cases} a+b+\sqrt{2ab} \\ \\ a+b-\sqrt{2ab} \end{cases}$$

Como $x < a$ e $x < b$, então não pode ser $a+b+\sqrt{2ab}$, já que $a+b+\sqrt{2ab} > a$ e $a+b+\sqrt{2ab} > b$.
Portanto $x = a+b-\sqrt{2ab}$.

Exercício 27: Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1, C_2 e C_3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura.





Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?
Solução:
Considere na figura dada, as três goiabas de centros C_1, C_2 e C_3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente.

Denote na figura $\overline{C_1B} = y$ e $\overline{TA} = x$.
No ΔC_1BC_2, usando o Teorema de Pitágoras vem:

$$y^2 + 6^2 = (8+2)^2 \Rightarrow y = 8 \quad (1)$$

Temos que $\Delta\ C_2TA \sim \Delta\ C_2C_1B$, já que

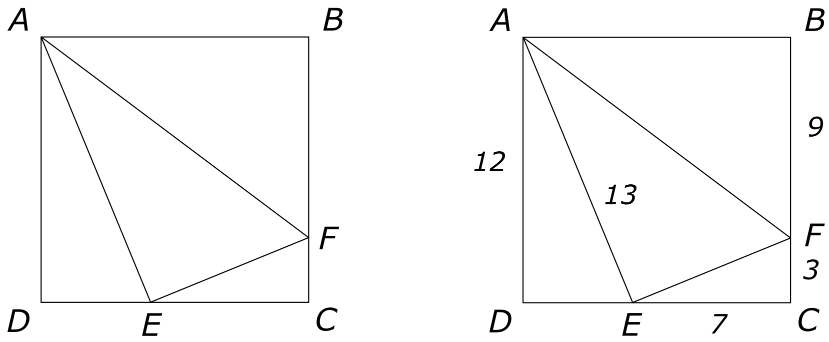
$$\overline{TA} \parallel \overline{C_1B} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow 10x = 64 \Rightarrow x = 6,4$$

Logo o caminho mais curto mede: $2 + x + x + 2 = 4 + 2 \cdot 6,4 = 16,8$ cm.

Exercício 28: No quadrado *ABCD* de lado 12 cm, temos $\overline{AE} = 13$ cm e $\overline{CF} = 3$ cm. O ângulo *AÊF* é agudo, reto ou obtuso? Justifique.



Solução:

Seja o quadrado *ABCD* de lado 12 cm, temos $\overline{AE} = 13$ cm e $\overline{CF} = 3$ cm.
No ΔADE, temos:

$$12^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{DE}^2 = 13^3 - 12^2 = 25 \Rightarrow \overline{DE} = 5$$

Daí

$$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 12 - 5 = 7$$

No ΔABF, temos:

$$12^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AF}^2 \Rightarrow \overline{AF}^2 = 144 + 9^2 = 225 \Rightarrow \overline{AF} = 15$$

No ΔCEF, temos:

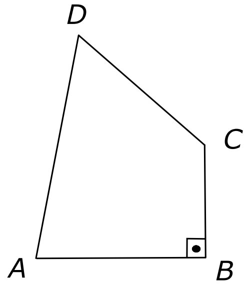
$$\overline{EF}^2 = 7^2 + 3^2 = 58$$

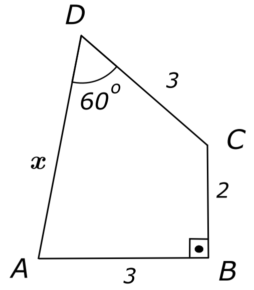
No ΔAEF, temos:

$$15^2 < 13^2 + \sqrt{58}^2 \text{ pois } 225 < 169 + 58$$

Pela Síntese de Clairaut temos que *AÊF* é agudo.

Exercício 29: No quadrilátero *ABCD* da figura, $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, *m(AD̂C)* $= 60°$ e *m(AB̂C)* $= 90°$. Determine a medida, em centímetros, do perímetro do quadrilátero.





Solução:

Seja o quadrilátero *ABCD*, tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, *m(AD̂C)* $= 60°$ e *m(AB̂C)* $= 90°$.

No ΔABC, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{13}$$

Denote $\overline{AD} = x$. Usando a lei dos co-senos no ΔACD, vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \cos 60°$$

$$(\sqrt{13})^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 13 = x^2 + 9 - 3x$$

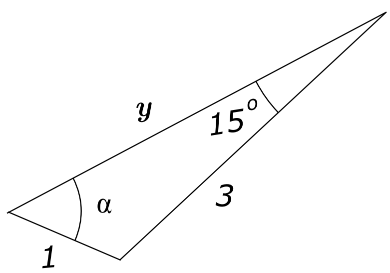
Temos que $x^2 - 3x - 4 = 0$. Resolvendo esta equação vem:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ \\ \dfrac{3-5}{2} = -1 \text{(Não serve)} \end{cases}$$

Logo o perímetro do quadrilátero *ABCD* é :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 3 + 2 + 3 + 4 = 12\text{cm}.$$

Exercício 30: Considere o triângulo não retângulo da figura abaixo. Determine $\operatorname{sen} \alpha$.



Solução: Seja o triângulo retângulo da figura:

Pela lei dos senos temos:

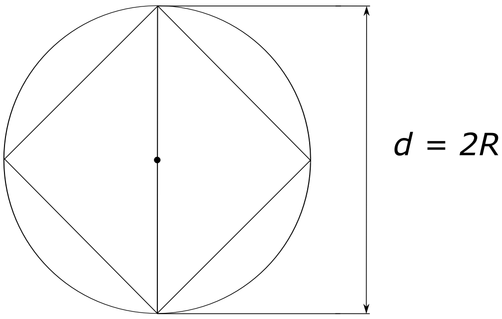
$$\frac{1}{\operatorname{sen} 15°} = \frac{3}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 3 \operatorname{sen} 15°$$

Exercício 31: A diagonal de um quadrado inscrito em um círculo mede 8 cm. Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito nesse círculo.

Solução:

Temos que a diagonal de um quadrado inscrito em um círculo é o diâmetro, ou seja,

$$2R = d \Rightarrow d = 8 = 2R \Rightarrow R = 4$$

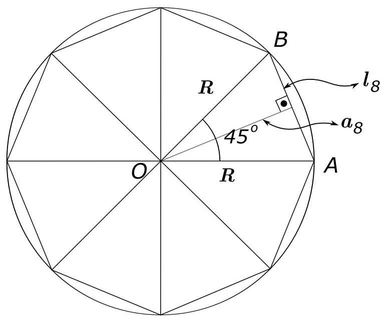


Como o lado em função do raio de um triângulo equilátero inscrito neste círculo é $l_3 = R\sqrt{3}$ temos que $l_3 = 4\sqrt{3}$.
Daí o perímetro pedido é $3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm.

Exercício 32: Dado o raio R de uma circunferência, calcular o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

Solução:

Considere a figura que mostra o octógono regular inscrito.



Note que o ângulo central $A\hat{O}B$ é $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

Vamos achar o lado, do octógono (l_8), em função do raio R.
Usando a lei dos co-senos vem:

$$l_8^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45°$$

$$l_8^2 = 2R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2 - R^2\sqrt{2}$$

$$l_8^2 = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Vamos achar , agora, o apótema do octógono (a_8) em função do raio R.
Da figura, vem por Pitágoras:

$$a_8^2 + \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow a_8^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a_8^2 = R^2 - \frac{2R^2 - R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4}$$

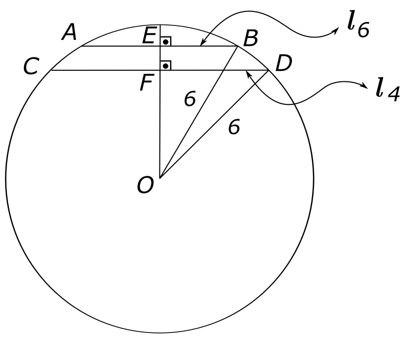
$$\Rightarrow a_8^2 = \frac{2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}$$

$$\Rightarrow a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Exercício 33: Em um semicírculo de raio 6 cm, traçam-se duas cordas paralelas que representam os lados de um quadrado e de um hexágono regular inscritos. Calcule a distância entre as duas cordas.

Solução:

Seja um semicírculo de raio 6 cm e duas cordas paralelas que representam os lados de um quadrado e de um hexágono.



Seja $\overline{AB} = l_6$, $\overline{CD} = l_4$ e $R = 6$. Vamos calcular $\overline{EF} = \overline{OE} - \overline{OF}$.
Considere os triângulos *OEB* e *OFD*:
Temos

$$\overline{OE}^{\,2} + \overline{EB}^2 = \overline{OB}^2 \Rightarrow \overline{OE}^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2 = 6^2. \quad (1)$$

$$\overline{OF}^{\,2} + \overline{FD}^2 = \overline{OD}^2 \Rightarrow \overline{OF}^2 + \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 = 6^2. \quad (2)$$

Temos que

$$l_4 = 6\sqrt{2} \quad (3) \text{ e } l_6 = 6 \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1) vem:

$$\overline{OE}^{\,2} = 36 - \frac{6^2}{4} = 36 - \frac{36}{4} = 27 \Rightarrow \overline{OE} = 3\sqrt{3}$$

Substituindo (3) em (2) vem:

$$\overline{OF}^{\,2} = 36 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 36 - 9 \cdot 2 = 18 \Rightarrow \overline{OF} = 3\sqrt{2}$$

Daí a distância pedida é: $\overline{EF} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Exercício 34: De quanto aumenta o raio de uma circunferência quando o seu comprimento aumenta de π cm?

Solução:

Seja uma circunferência de raio R e comprimento C. Temos que $C = 2\pi R$.
Se aumentarmos o comprimento C de π, vamos determinar de quanto aumenta o raio R. Denote o novo raio de R'.
Então

$$C + \pi = 2\pi R' \Rightarrow 2\pi R + \pi = 2\pi R' \Rightarrow R' = \frac{2\pi R + \pi}{2\pi} = \frac{\pi(2R+1)}{2\pi} \Rightarrow R' = \frac{2R+1}{2}$$

Logo o aumento pedido é: $R' - R = \dfrac{2R+1}{2} - R = \dfrac{2R+1-2R}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercício 35: Em uma engrenagem a roda grande de raio 75 cm faz 900 voltas, enquanto a pequena dá 1500 voltas. Qual o raio da roda pequena?

Solução:

A roda grande tem raio 75 cm e faz 900 voltas.
Vamos determinar o comprimento total (C) da roda grande.

$$C = 2\pi \cdot 75 \cdot 900 \quad (1)$$

A roda pequena dá 1500 voltas, vamos determinar o raio (r) desta roda.
Note que o comprimento total desta roda é o mesmo da roda grande.
Logo

$$C = 2\pi \cdot r \cdot 1500 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

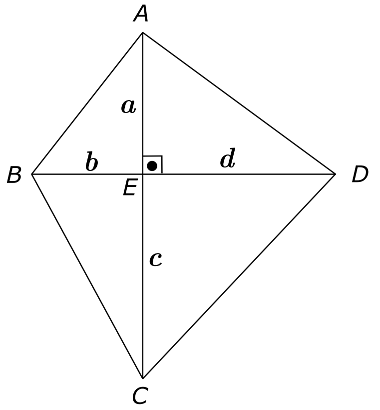
$$2\pi \cdot r \cdot 1500 = 2\pi \cdot 75 \cdot 900 \Rightarrow 1500r = 75 \cdot 900 \Rightarrow r = 45 \text{ cm}$$

Daí o raio da roda pequena é 45 cm.

Exercício 36: Calcule a área de um quadrilátero convexo de diagonais perpendiculares medindo 12 cm e 15 cm.

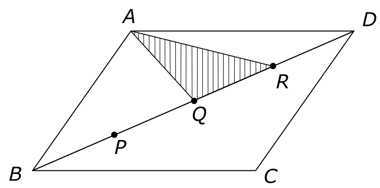
Solução:

Considere um quadrilátero convexo *ABCD* de diagonais perpendiculares (Note que o enunciado não diz que o quadrilátero é um losango).



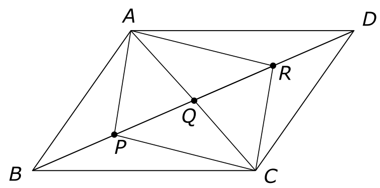
Vamos denonimar a interseção das diagonais de E e denote $\overline{AE} = a,\ \overline{BE} = b,\ \overline{CE} = c$ e $\overline{DE} = d$.
Temos que a área do quadrilátero é:
$S_{ABCD} = \dfrac{ab}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{ad}{2} + \dfrac{cd}{2} = \dfrac{(a+c)b}{2} + \dfrac{(a+c)d}{2}$
Então
$S_{ABCD} = \dfrac{(a+c)(b+d)}{2} = \dfrac{12 \cdot 15}{2} = 90$
Daí a área procurada é 90 cm^2.

Exercício 37: No paralelogramo *ABCD* de área 48 cm^2, os pontos *P, Q* e *R* dividem a diagonal *BD* em quatro partes de igual medida. Calcule a área do triângulo *AQR*.



Solução:

Seja o paralelogramo *ABCD* de área 48 cm^2 e os pontos *P, Q* e *R* dividindo a diagonal *BD* em quatro partes de igual medida.

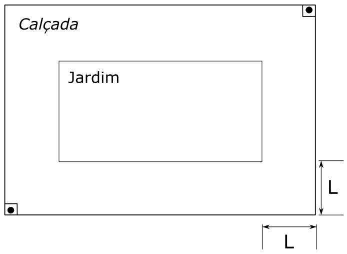


Ligando os pontos *A* a *P*, *C* a *P*, *C* a *Q* e *C* a *R*; temos 8 triângulos a saber:

$$ABP,\ APQ,\ AQR,\ ARD,\ CBP,\ CPQ,\ CQR \text{ e } CRD$$

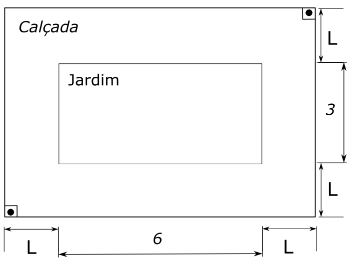
Esses triângulos tem a mesma área, já que eles tem a mesma base e a mesma altura. Portanto, já que a área do paralelogramo é a soma das áreas desses oito triângulos, temos que a área do triângulo *AQR* é: $\dfrac{48}{8} = 6$ cm^2.

Exercício 38: Num terreno retangular com 54 cm^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 6 metros por 3 metros, contornado por uma calçada de largura *L*, como indica a figura. Calcule o valor de *L*.



Solução:

Seja a figura dada e temos que a área do terreno é 54 m^2 e o retângulo que iremos construir, o jardim, mede 6 metros por 3 metros.
Vamos achar a largura *L* da calçada.



Temos que

$$(6+2L)(3+2L) = 54 \Rightarrow 18 + 6L + 12L + 4L^2 = 54.$$

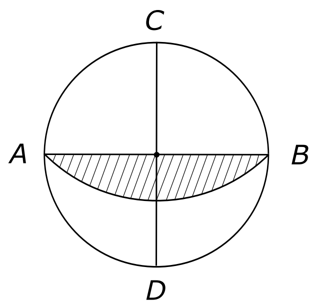
$$\Rightarrow 4L^2 + 18L - 36 = 0 \Rightarrow 2L^2 + 9L - 18 = 0$$

Resolvendo a equação de 2° grau vem:

$$L = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{4} \begin{cases} \dfrac{-9-15}{4} = -6 \\[2ex] \dfrac{-9+15}{4} = \dfrac{6}{4} = 1,5 \end{cases}$$

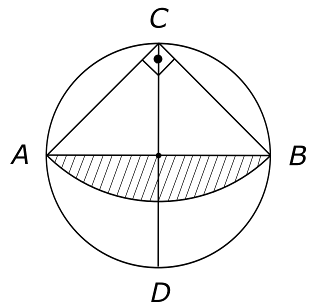
Como $L > 0$, temos que o valor de $L =$ 1,5 metros.

Exercício 39: Considere a circunferência, representada abaixo, de raio 2 cm e os diâmetros *AB* e *CD* perpendiculares. Com centro em *C* e raio *CA* foi traçado o arco $\overset{\frown}{AB}$. Determine a área da região assinalada.



Solução:

Seja a circunferência dada, com raio 2 cm e os diâmetros *AB* e *CD* perpendiculares.



Temos que

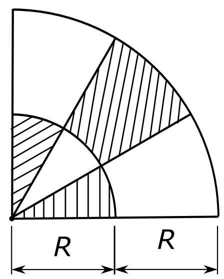
$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{2} \text{ e } A\hat{C}B = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Denotando a área pedida por A_p vem que:

$$A_p = A_{setor\ CAB} - A_{\Delta ACB} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2} = 2\pi - 4$$

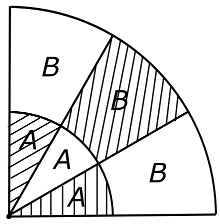
Daí a área da região assinalada é $(2\pi - 4)$ cm^2.

Exercício 40: A figura mostra dois arcos de circunferência de centro *O*, raios *R* e *2R* e três ângulos congruentes. Calcule a razão entre as áreas da região hachurada e não hachurada.



Solução:

Seja a figura dada, com raios *R* e *2R* dos dois arcos de centro *O* e três ângulos congruentes.



As três regiões de centro O e raio R, vamos denotar po A.
As outras três regiões, vamos denotar por B, como está indicado na figura.
Vamos achar a área da região A.

$$S_A = \frac{\pi R^2}{4 \cdot 3} = \frac{\pi R^2}{12}$$

Vamos achar a área da região B.

$$S_B = \frac{\pi (2R)^2}{4 \cdot 3} - \frac{\pi R^2}{12} = \frac{4\pi R^2}{12} - \frac{\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{4}$$

A área da região hachurada é: $2S_A + S_B$ e a área da região não hachurada é $S_A + 2S_B$
Logo, a razão entre as áreas pedidas é:

$$\frac{2S_A + S_B}{S_A + 2S_B} = \frac{\dfrac{2\pi R^2}{12} + \dfrac{\pi R^2}{4}}{\dfrac{\pi R^2}{12} + \dfrac{2\pi R^2}{4}} = \frac{\dfrac{2\pi R^2 + 3\pi R^2}{12}}{\dfrac{\pi R^2 + 6\pi R^2}{12}} = \frac{5\pi R^2}{12} \cdot \frac{12}{7\pi R^2} = \frac{5}{7}$$

Serviço gráfico realizado em parceria com a Fundação Santa Cabrini por intermédio do gerenciamento
laborativo e educacional da mão-de-obra de apenados do sistema prisional do Estado do Rio de Janeiro.

Maiores informações: www.santacabrini.rj.gov.br

ISBN 978-85-7648-659-6
9 788576 486596

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL